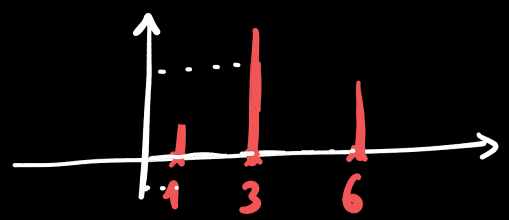
CH13 – Variables aléatoires réelles à densité

Plan du chapitre

on préfèrera des VAR à densité à des VAR discrètes pour des questions d'échelle.

Modèle discret : les valeurs mesurées sont macroscopiquement séparées

Loi de X :



- dit que : $X(\Omega) \overset{\circ}{=} \{1, 3, 6\}$ = là où il y a de la masse.

• 3 est la valeur la plus fréquemment observée

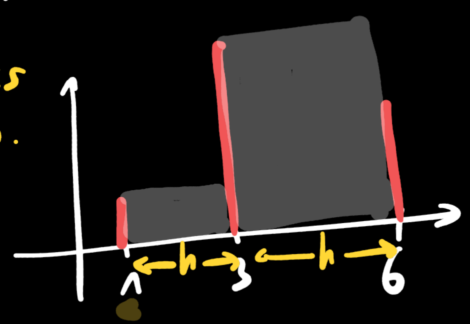
$$P(X \in [1,3]) = P(X=1) + P(X=3)$$

séparés macroscopiquement

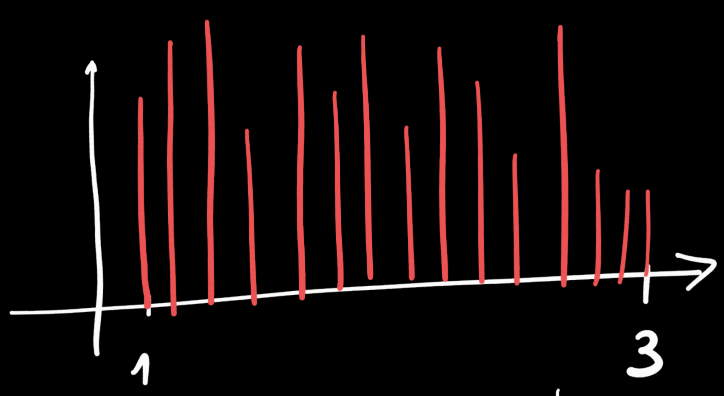
Posons $h = 1$ ← incrément macroscopique

$$P(X \in [1,3]) = P(X=1)h + P(X=3)h$$

= somme des aires des rectangles.



- Si maintenant les valeurs de X ne sont pas macroscopiquement séparées ?



$$P(X \in [1,3]) = \sum_{k=1}^{N} P(X = x_k) h \quad \begin{matrix} N \to +\infty \\ h \to 0 \end{matrix}$$

$$\simeq \int_1^3 f(t)\,dt$$ par la méthode des rectangles.

Dans ce genre de modèles, des événements comme $[X=a]$ ne sont pas pertinents :

on étudie plutôt $X \in I$, I intervalle

Liste des définitions

Liste des techniques de base

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

1 Généralités

A) Densité

■ Définition 1 .... [Densité de probabilité ou fonction de masse]

$\pi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

La fonction f est une densité de probabilité si les 4 conditions sont vérifiées :

1. f est définie sur $\mathbf{R}$.
2. f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf au plus en un nombre fini de points.
3. f est positive sur $\mathbf{R}$.
4. l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

X

$\pi(x_k) \geq 0$

$\sum \pi(x_k) = 1$

B) Variable aléatoire réelle à densité

■ Définition 2 .... [densité d'une variable aléatoire variable à densité]

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

1. On dit que X admet la fonction f comme densité si :
   a) La fonction f est une fonction de masse.
   b) Pour tout réel x : $P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ ← intégrale généralisée = Primitive de f nulle en $-\infty$.
2. On dit que X est à densité, ou qu'elle admet une densité, si il existe une fonction f telle que X admette f comme densité. Dans ce cas, la densité est notée f_X.

■ Proposition 1 .... [Quasi-unicité de la densité]

Une densité de probabilité d'une variable à densité est unique *modulo* un ensemble fini, c'est-à-dire : si f et g sont deux densités de X, alors f et g prennent les mêmes valeurs partout sauf au plus en un nombre fini de points.

C) Fonction de répartition ← c'est l'objet le plus adapté à l'étude des VAR à densité et aux calculs des probas.

■ Définition 3 .... [Fonction de répartition]

Si X est à densité de densité f_X, sa fonction de répartition est définie par $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$. conforme à déf 2.

■ Remarque 1.

Inutile de prouver la convergence de cette l'intégrale généralisée : elle converge car f_X est une densité (en effet l'existence de $F_X(x)$ pour tout réel x devient alors une simple conséquence la relation de Chasles).

■ Corollaire 1 .... [*Caractérisation de la loi par la fonction de répartition*]

La loi d'une VAR à densité est déterminée par sa fonction de répartition : si on reconnaît en F_X la fonction de répartition d'une loi connue (usuelle ou déjà calculée par ailleurs p.ex), **on peut affirmer** que X suit aussi cette loi connue.

■ Exemple 1. Compris une fois que les densités usuelles seront vues

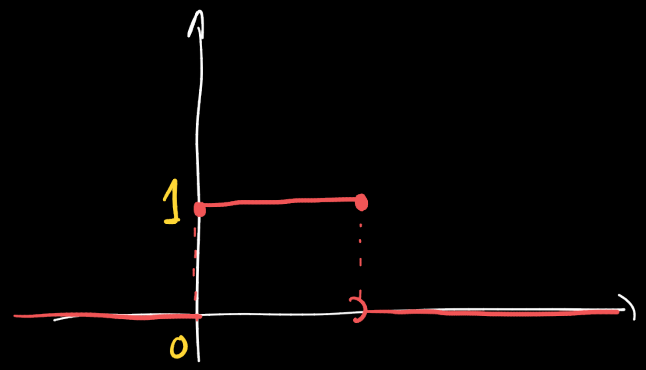
Si la fonction de répartition de la variable Y est donnée par :

$$F_Y(y) = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & y \leq 0 \\ y & \text{si} & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si} & y \geq 1 \end{array} \right.$$

Fonc° de rép d'une loi usuelle (cf. 3A)

alors on peut affirmer que Y suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

<u>Exemple</u> : Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 1$ si $x \in [0,1]$
0 sinon.



$$f = \mathbb{1}_{[0,1]}$$

Montrer que f est une densité.

1) f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) f est $C^0(\mathbb{R} \setminus \{0,1\})$ car sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$ elle est constante : elle est bien C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf en 2 (= nb fini) points.

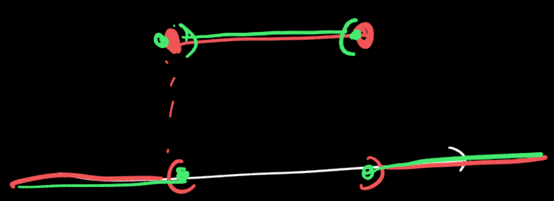
3) f est positive puisqu'elle prend comme valeurs 0 et 1

4) Convergence vers 1 de $\int_{-\infty}^{\infty} f$?

Comme il y a sur $\mathbb{R}$ seulement 2 points éventuels de discontinuité : il y a 4 impropriétés : $-\infty, 0, 1, +\infty$.

Étude en $\pm\infty$: f est nulle au voisinage de $\pm\infty$ donc les intégrales y sont convergentes (et nulles).
CM12 $\boxed{T_1}$ 1-6)

Étude en 0 et 1 : Comme f est constante sur $]0,1[$, $]1,+\infty[$ et $]-\infty, 1[$, il est clair que les restrictions de f à ces intervalles sont prolongeables par continuité en 0 et 1



$\longrightarrow$ f est C^0 par morceaux en 0 et 1 : intégrale classique.

Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1 f = 1$.

f est bien une densité.

Rem : f est une densité usuelle (cf 3A)

■ **Définition 4** .... [Loi d'une variable à densité]

1. Si X est à densité, on appelle loi de X toute densité de X.
2. On dit que deux variables aléatoires à densité ont même loi si elles admettent une densité en commun.

D) Règles de calcul des probabilités avec les variables à densité

← cf proposition 1.

■ **Théorème 1** .... [*Calcul*]

Exemple : si $f_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$ (déf 2 CH12) est une densité de X, $f_2 = \mathbb{1}_{]0,1[}$ aussi.

Soit X une VAR à densité de densité f_X.

1. Pour tout réel a, $P(X = a) = 0$.
2. Si $a < b$, sont deux réels les probabilités des évènements $X \in [a, b]$, $X \in [a, b[$, $X \in]a, b]$ et $X \in]a, b[$ sont toutes égales et valent $\displaystyle\int_a^b f_x(t)\mathrm{d}t = F_X(b) - F_X(a)$.
3. Pour tout réel t :
$$P(X \geq t) = P(X > t) = 1 - F_X(t)$$

■ **Remarque 2.**

☠ l'égalité $P(X \geq t) = P(X > t)$ est en général fausse, sauf si X est une variable à densité.

[primitivation à vue + déf 2 b).

E) Théorème le plus important

Il est en général faux de dire $[X \geq t] = [X > t]$ même si X est à densité.

■ **Théorème 2** .... [*Caractérisation des variables à densité*]

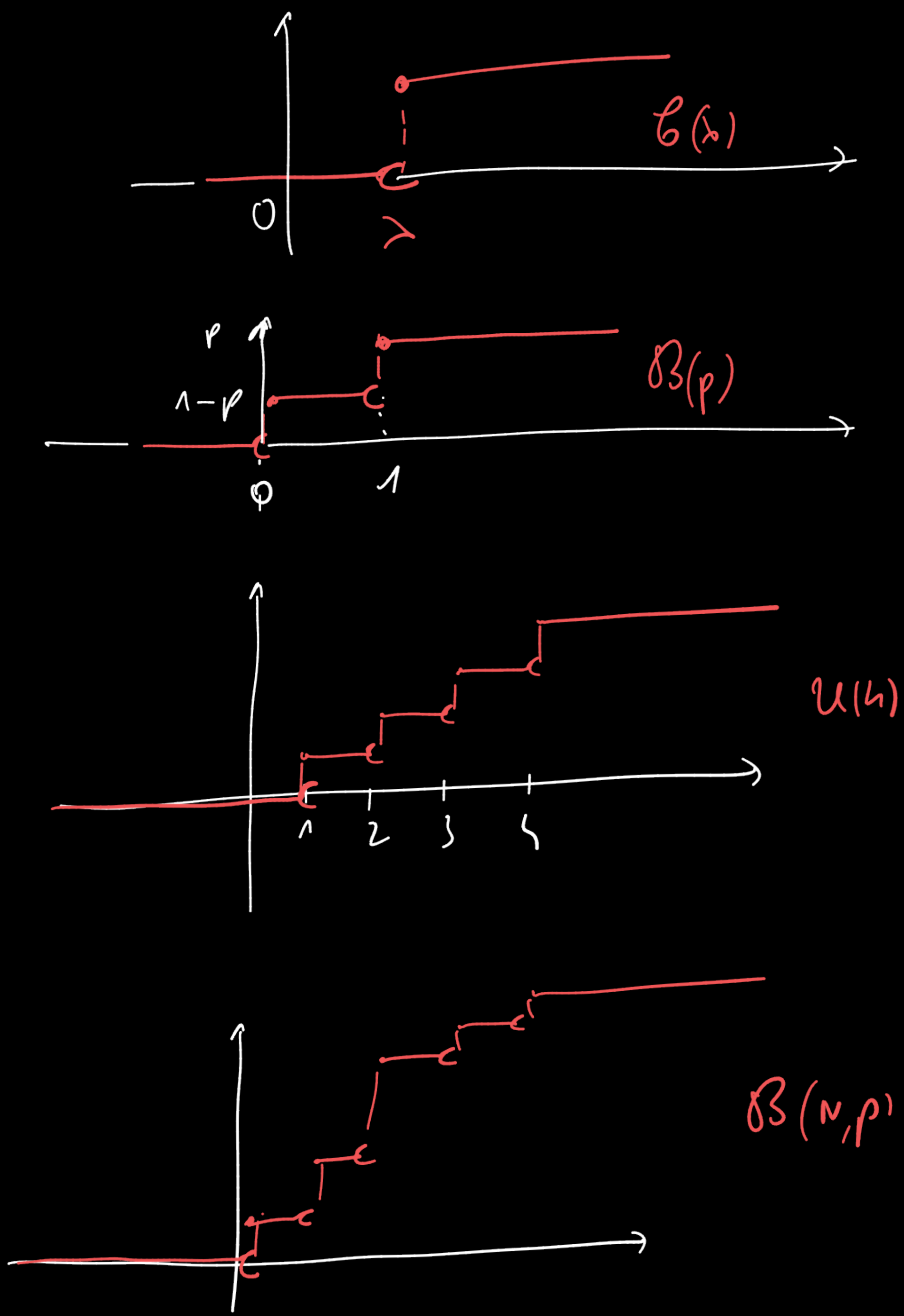
1. Soit Y une VAR sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et F_Y sa fonction de répartition.
   et le prix de l'année.
   - **Si les deux conditions suivantes sont remplies :**
     SANS LA FONCTION DE REP., en dehors des lois usuelles, ON NE PEUT PAS AFFIRMER QU'UNE VAR EST À DENSITÉ
     a) F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
     b) Il existe un ensemble fini (ou vide) Δ tel qu'en dehors de Δ, la fonction F_Y est $\mathscr{C}^1$ [a],
   - **alors on peut affirmer les deux points suivants :** (on se demande si elle est à densité)
     a) Y est bien une variable aléatoire à densité.
     b) De plus, on une densité f_Y de Y est donnée par :
$$f_Y(t) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si} t \in \Delta \\ F'_Y(t) & \text{sinon .} \end{array} \right.$$
2. Enfin, Si une variable est à densité, alors il est vrai que sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$-sauf.

[a]. On dit dans ce cas que F_Y est $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être au plus en un nombre fini de points, abrégé «$\mathscr{C}^1$-sauf».

■ **Remarque 3.**

On utilise ce théorème pour prouver qu'une variable Y fabriquée à partir d'une VAR à densité X est aussi à densité.

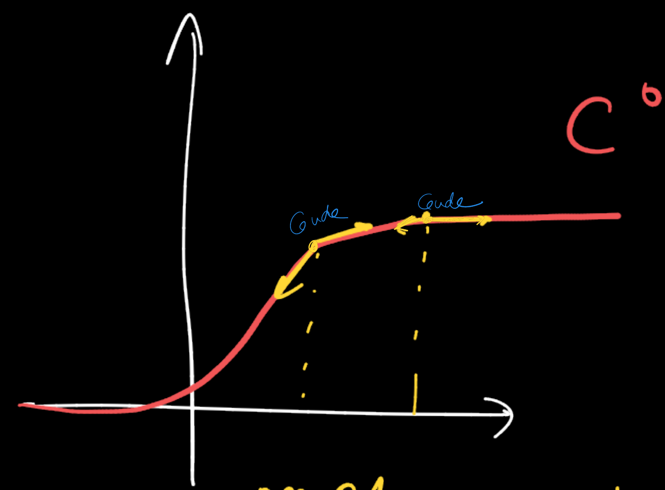
F_X pour VAR de 1ère année :



escaliers

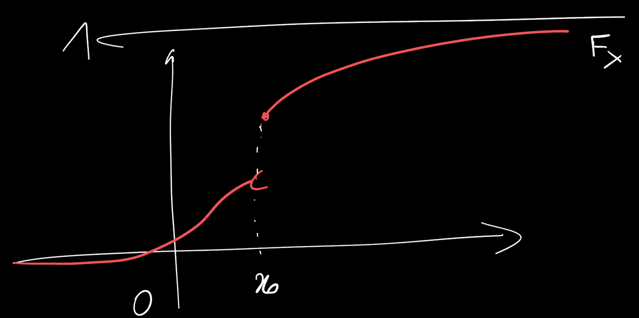
En 2e année.

Voir Ch12



pas C^1 en 2 points

Toboggans



F.d.r d'une VAR qui n'est pas au programme

T131 Comment prouver qu'une variable donnée est à densité ?

1. On peut reconnaître une loi usuelle.
2. Sinon on examine sa fonction de répartition :
   a) Soit on reconnaît la fonction de répartition d'une variable de loi connue et on applique le **Corollaire 1**.
   b) Soit on calcule la fonction de répartition et on applique le **Théorème 2**, voir **T132**.
   c) Un cas plus expéditif que **b)** est celui où l'énoncé dit : «vérifier que la variable X est à densité et qu'une densité est $f(x) = \dots$» : il suffit de calculer la fonction de répartition de X et la comparer à $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. On conclut par **cor. 1** encore.

T132 Comment appliquer Th. 2 pour une VAR Y ?

En général, Y est donnée comme dépendant d'une variable X dont *on sait* qu'elle est à densité. Pour prouver que Y est à densité :

1. On commence par calculer l'espace image de Y

- **a)** c'est en général un intervalle I, et il est tel que $P(Y \in I) = 1$. En pratique on écrit quelque chose comme : « $Y(\Omega) = I$ quasi-certainement»
- **b)** mettons alors $I = (a, b)$ (a, b, éventuellement infinis,et bornes éventuellement fermées ou non)

2. Ensuite, on exprime $F_Y(t)$ en termes de F_X. Pour cela :

- **a)** on traite rapidement le cas $t \notin I$: $F_Y(t) = 1$ si $t > b$ et $F_Y(t) = 0$ si $t < a$ le cas échéant. (*en effet, si p.ex* $b = +\infty$, *le cas* $t > b$ *est vide*).
- **b)** On traite le cas $t \in I$: on fixe $t \in (a, b)$ et on transforme l'évènement $[Y \leq t]$ en un évènement **en termes de** X.
- **c)** Ceci permet de calculer $F_Y(t)$ en termes de de F_X : $F_Y(t) = F_X(u(t))$. Si vous avez correctement traité **2.b)**, votre $u(t)$ doit être dans $X(\Omega)$. Sinon, il y a une erreur.
  est défini et
- **d)** La synthèse de `1.` et `2.` nous donne donc l'expression de $F_Y(t)$ *en tout réel* t.

3. À ce stade, on doit avoir la valeur de $F_Y(t)$ **pour tout réel** t. Ensuite :

- **a)** Soit on reconnaît en $F_Y(t)$pour tout $t \in \mathbf{R}$ l'expression d'une fonction de répartition d'une loi connue et on conclut avec le `Cor. 1`
- **b)** Sinon on vérifie que F_Y ainsi obtenue est :
  - **i)** $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$. En général, cela se voit sauf aux points de raccords éventuels a, b (il faut donc être soigneux pour ces points là).
  - **ii)** $\mathscr{C}^1$ en dehors de l'ensemble $\Delta = \{a, b\}$ (cela suffit d'après la condition `2.` **Théorème 2**). Cela devrait se voir par opérations sur des fonctions usuelles et F_X, dont on *sait* qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points au plus d'après **Théorème 2** `2.`.

4. Enfin, si on souhaite une densité de Y, on l'obtient en dérivant F_Y là où c'est possible (c'est impossible au plus en un nombre fini de points, mais le fait de ne pas avoir de valeur pour la densité en ces points-là n'a aucune importance d'après **Proposition 1**).

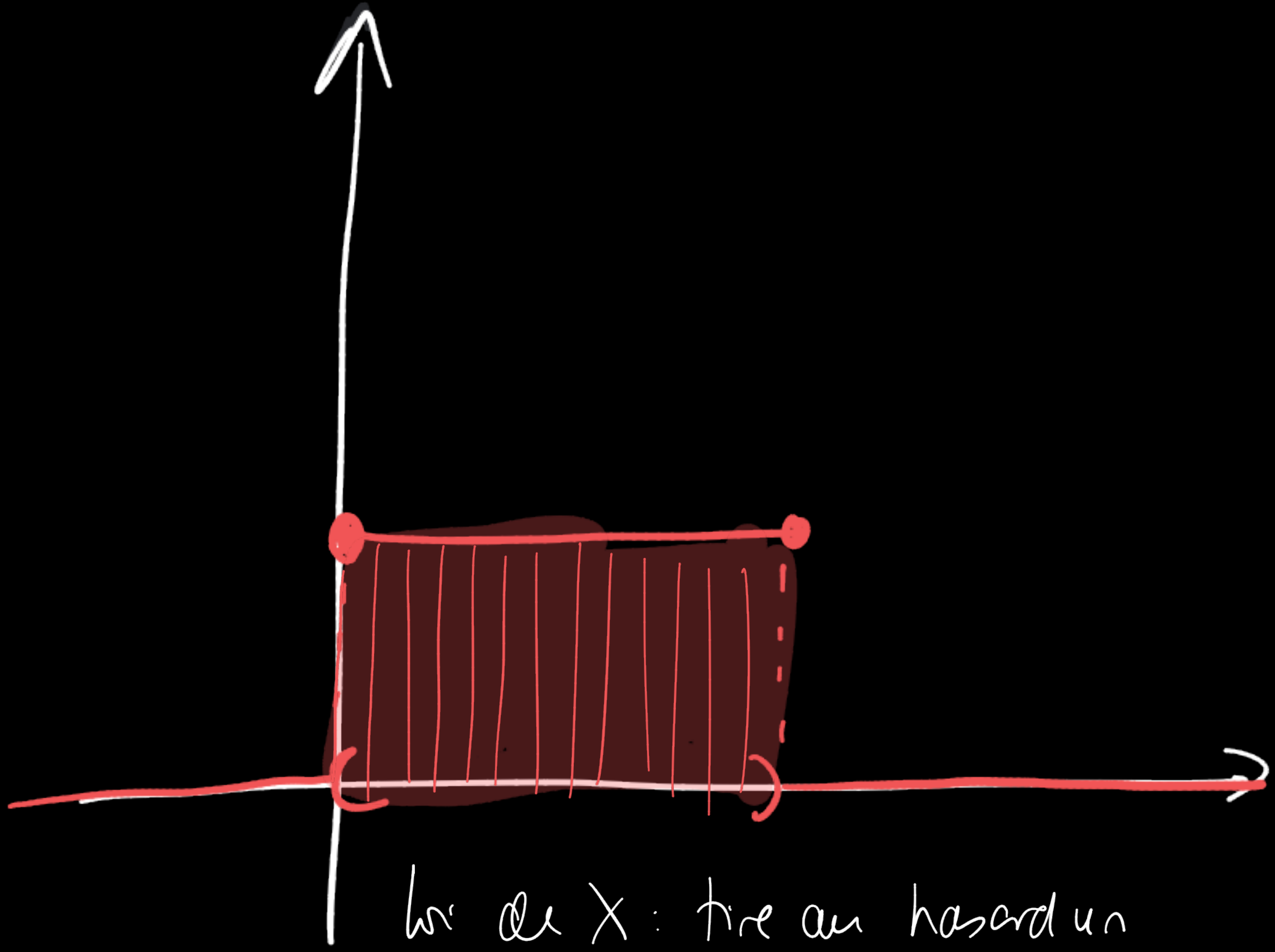
Voir exemple 2

Exemple 2.

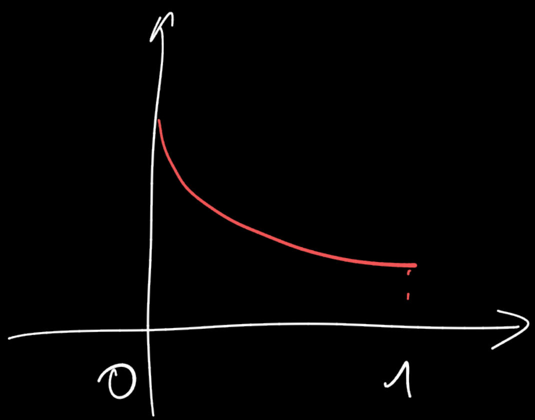
envoutons

Soit X une VAR *à densité de loi $f_X : x \mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ Montrer que la* VAR *X^2 est à densité et en donner la loi.*

On a vu que f_X est bien une densité.



loi de X : tire au hasard un réel dans $[0,1]$.



X^2 ? VAR qui mesure quoi ?

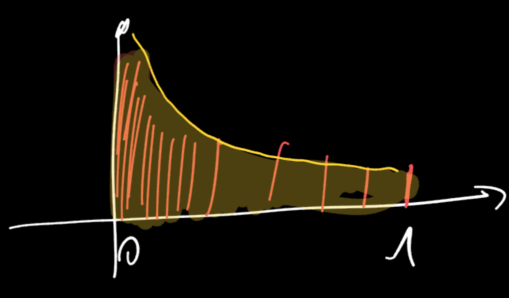
- je tire un nb au hasard entre 0 et 1
- je mesure son carré

→ quand on tire un nb au hasard entre 0 et 1, son carré est "beaucoup plus petit" : si $x \sim 10^{-2}$
$x^2 \sim 10^{-4}$

si $x \sim 10^{-5}$
$x^2 \sim 10^{-10}$.

il est intuitif que les valeurs de X^2 vont se concentrer autour de 0.

bâtons des fréquences pour X^2 ?



densité plus concentrée

On note Y la VAR qui est X^2.
On applique $T_{13.2}$

T132

1

1a) Comme la densité de X est concentrée dans $[0,1]$, X prend ses valeurs dans $[0,1]$ quasi-certainement et donc son carré aussi : $Y(\Omega) = [0,1]$ quasi certainement.

1b) $I = [0,1]$

2. Calcul de $F_Y(t)$ pour tout réel t en termes de F_X.

a) $\boxed{\text{Cas } t \notin [0,1]}$ Si $t<0$: $P(Y \leq t) = 0$ (cf 1a))

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_-^* \quad F_Y(t) = 0}$$

Si $t > 1$ $P(Y \leq t) = 1$ idem

$$\boxed{\forall t > 1 \quad F_Y(t) = 1}$$

b) $\boxed{\text{Cas } t \in I}$. Soit $t \in [0,1]$.

T7CH9 :

$$[Y \leq t] = [X^2 \leq t]$$

$= [\sqrt{X^2} \leq \sqrt{t}]$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est bijective et croissante sur $\mathbb{R}_+$

$= [|X| \leq \sqrt{t}]$ par déf de $|\cdot|$

$= [X \leq \sqrt{t}]$ car X prend ses valeurs dans $[0,1]$.

2c) En passant aux probas :

$$F_Y(t) = F_X(\sqrt{t}) \underset{X \text{ à densité}}{=} \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} f_X(u)\,du \qquad f_X = \mathbb{1}_{[0,1]}$$

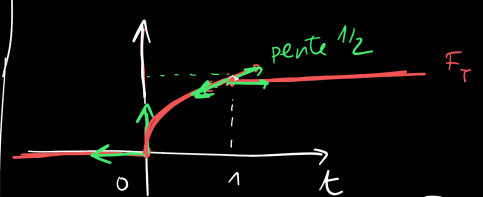
$= \int_0^{\sqrt{t}} f_X(u)\,du$ car $f_X = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

$\forall t \in [0,1]$. $F_Y(t) = \int_0^{\sqrt{t}} du = \sqrt{t}$.

2d) En synthétisant 2a) et 2c) :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 1 \\ \sqrt{t} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (2d)$$

3



3a) : Non...

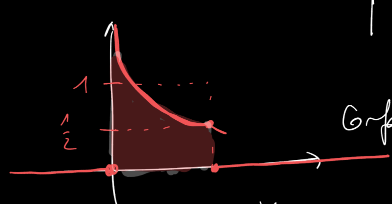
3b) i) il est facile de voir que F_Y est C^0 sur $]1,+\infty[$, $]0,1[$ et $]-\infty,0[$ d'après les expressions (2d)

Sur ces expressions aussi, on voit que les limites à gauche et à droite de F_Y en $t=0$ et $t=1$ sont égales à $F_Y(t)$. Conclusion : $\boxed{F_Y \text{ est } \mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$

ii) Visiblement aussi d'après (2d), F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ($\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sauf en un nb fini de points).

4. Conclusion : Y est une VAR à densité et on obtient une densité de f_Y en dérivant F_Y là où c'est possible :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,1] \\ \dfrac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } t \in]0,1[\end{cases}$$



Conforme à l'intuition.

loi de Y

■ Proposition 2 .... [Transformation affine d'une variable à densité]
Soit a, b deux réels tels que $a \neq 0$ et X une variable à densité. Soit $Y = aX + b$ la transformée affine de X. Alors :

1. Y est une variable aléatoire à densité.
2. Une densité de Y s'exprime en dehors d'un ensemble fini à l'aide d'une densité de X par

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

■ Exemple 3.
Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, $Y = (b-a)X + a$ est a densité donnée par : $f_Y(y) = \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\dfrac{y-a}{b-a}\right)$. Or, $\dfrac{y-a}{b-a} \in [0,1] \Leftrightarrow y \in [a, b] \Leftrightarrow \mathbf{1}_{[a,b]}(y) = 1$. On retrouve bien la loi uniforme sur $[a, b]$.

■ Exercice 1.
(*D'après oral 2018*) Soit $a > 0$ et b un réel. On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Laplace de paramètres a, b si elle admet pour densité la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f_{a,b}(t) = \frac{1}{2a}\exp\left(-\frac{|t-b|}{a}\right).$$

Justifier que $f_{a,b}$ est bien une densité.

2 Moments

A) Moment d'ordre r

■ Définition 5 .... [Moment d'ordre r d'une var à densité]

Soit $r \in \mathbf{N}, r \geq 2$ et X une variable aléatoire à densité sur un espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ de densité f_x.

1. On dit que X admet un moment d'ordre r si l'intégrale

$$M_r := \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\mathrm{d}t$$

   est **absolument** convergente.
2. Dans ce cas, le réel M_r s'appelle moment d'ordre r de X.

■ Proposition 3 .... [Relation d'existence entre les moments]

1. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leq r$.
2. En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance et une variance.

B) Espérance

■ Définition 6 .... [Espérance des variables à densité]
Soit X une variable aléatoire à densité et f_X une densité de la loi X.

1. On dit que X admet une espérance si elle admet un moment d'ordre 1.
2. Si X admet une espérance, l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\mathrm{d}t$$

de l'espérance (cf CH11. prop 7)

■ **Remarque 4.**
☠ on doit vérifier **l'absolue convergence.**

■ **Exemple 4.**
La densité définie sur $\mathbf{R}$ par $f_X(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+t^2}$ n'admet pas d'espérance.

■ **Proposition 4** .... [Propriétés de l'espérance]
Soit X, Y deux variables aléatoires à densité sur un espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. En plus des propriétés classiques :

1. (*positivité*) Si X est à valeurs positives, $E(X) \geq 0$.
2. Si X admet une espérance, $|X|$ admet une espérance aussi. De plus : $|E(X)| \leq E(|X|)$.

■ **Théorème 3** .... [*Formule de transfert*]
Soit X une variable à densité de densité f_X sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, et u une fonction telle que la VAR $Y = u(X)$ est aussi une variable à densité.

1. $u(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) f_X(t)\mathrm{d}t$ converge **absolument**.
2. Dans ce cas :

$$E(u(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) f_X(t)\mathrm{d}t$$

■ **Remarque 5.**

1. On peut ainsi connaître l'espérance de la variable $u(X)$ sans même disposer d'une densité de cette dernière : la connaissance de la densité de X suffit à calculer l'espérance de $u(X)$.
2. On dit formule de transfert, car le théorème affirme que $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{u(X)}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f_X(x)\mathrm{d}x$

C) Variance. Écart-type

p. ex. : $E(X^2) \underset{\text{déf de } E(X)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X^2}(x)\,dx \underset{\text{transfert}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$

■ **Définition 7** .... [Moment d'ordre 2 d'une variable à densité. Variance]
Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X. On dit que X admet une variance si la VAR $[X - E(X)]^2$ admet une espérance et on pose alors :

$$V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right)$$

et $\sigma_X := \sqrt{V(X)}$ son écart-type.

■ **Proposition 5** .... [Caractérisation en termes de moments]
X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2.

■ **Théorème 4** .... [*Formule de Koenig*]
Si X admet une variance, alors X admet aussi un moment d'ordre 2 et :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

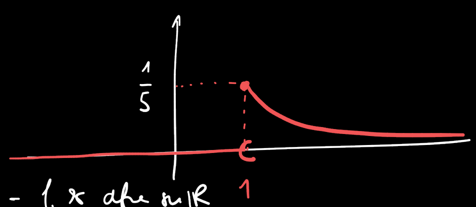
Exemple 4bis : (loi de Pareto)

Soit $f : x \mapsto \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \times \frac{1}{5} x^{-\frac{6}{5}}$

① Justifier que f est une densité de proba.

② Soit X une VAR à densité de loi f. Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$

Etudier l'existence de $E(Y_\rho)$ où $Y_\rho = X^\rho$



- f x afin sur $\mathbb{R}$
- f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ ← continue sauf enc.

- elle est positive
- Reste à étudier $\int_{-\infty}^{+\infty} f dt$.

Impropriétés : - pas d'impropriétés en un point de continuité
- f est continue par morceaux en 1.
- les seuls impropriétés sont en $-\infty / +\infty$.

En $-\infty$: f est nulle au voisinage de $-\infty$: donc l'intégrale y est convergente et nulle.

En $+\infty$: on introduit les intégrales partielles :

Soit $x > 0$. Soit $I(x) = \int_1^x \frac{1}{5} t^{-6/5} dt$

$$\underset{\text{à vue}}{=} \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1-\frac{6}{5}} t^{1-6/5}\right]_1^x$$

$$= -\left[x^{-1/5} - 1\right] = 1 - x^{-1/5}$$

$I(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ car $1/5 > 0$.

Conclusion : $I = \int_1^{+\infty} f$ existe et vaut 1.

$J = \int_{-\infty}^1 f$ ... 0.

$$\boxed{\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ existe, et vaut } 1}$$

② D'après la formule de transfert $E(Y^\rho)$ existe ssi l'intégrale :

$$I_\rho \overset{Y = X^\rho}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\rho f_X(x) dx \text{ converge } \boxed{\text{absolument}}$$

$$= \int_1^{+\infty} x^\rho f_X(x) dx \quad \text{car } f_X \text{ est nulle sur }]-\infty, 1[$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{x^\rho}{5} \cdot x^{-6/5} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{5} x^{\rho - 6/5} dx = \frac{1}{5} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{6/5 - \rho}} dx$$

Comme f_X est positive, et x^ρ aussi, la convergence absolue équivaut à la convergence

D'après l'exercice 2 CH12 on a vu que cette intégrale :

converge $\underline{\underline{\text{ssi}}}$ $\alpha = \frac{6}{5} - \rho > 1$

i.e. $\boxed{\rho < \frac{1}{5}}$

Exo2 CH12

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ cvge ssi } \alpha > 1}$$

Y_ρ admet une espérance ssi $0 < \rho < 1/5$.

Exemple 4 : 1. Révision : vérifier que f_X est une densité.

① f_X est bien définie sur $\mathbb{R}$.
② f_X est clairement $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc continue sauf en plus en un nombre fini de points.
③ f_X est une fonction positive.
④ Reste à prouver que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ existe et vaut 1.

. Je remarque que f_X est paire donc $J = \int_0^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est de même nature que I et en cas de convergence : $I = 2J$
(cf CH12. prop. 2 point 5).

. On travaille sur J.
Comme f_X est C^0 sur $[0,+\infty[$ la seule impropriété de J est en $+\infty$. C'est une vraie impropriété → CH12. T_2. 2.b) i)
On considère : $\forall x > 0 \quad J(x) = \int_0^x \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$ ← vu ds CH12 !

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan} x$$

or $\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} + o(1)$ $x \to +\infty$ donc :

$$J(x) = \frac{1}{2} + o(1) \quad x \to +\infty.$$

Conclusion : J converge et vaut $1/2$
I ——————— 1 : f_X est une densité

2. Étude de l'espérance :
Cours : $E(X)$ existe si $\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{t}{1+t^2}\,dt$ converge absolument
et dans ce cas, $E(X) = \alpha$.

On considère $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{|t|}{1+t^2}\,dt$.

Avec la même argumentation qu'en 1, j'étudie
$\forall x > 0 \quad J_2(x) = \int_0^x \frac{1}{\pi}\frac{|t|}{t^2+1}\,dt$.

$$= \int_0^x \frac{t}{\pi(1+t^2)}\,dt \quad \text{car } t \in [0,x] \text{ donc } t \geq 0$$

$$\underset{\text{à une}}{=} \int_0^x \frac{1}{2\pi}\frac{u'(t)}{u(t)}\,dt \quad \text{où } u(t) = 1+t^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln|1+x^2| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

J_2 diverge. I_2 aussi : $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

■ **Proposition 6** .... [Propriétés de la variance]
Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et admettant une variance. Alors :

1. (*Positivité*). $V(X) > 0$. En particulier, une variable à densité ne peut être de variance nulle.
2. (*Homogénéité*.) Si X est exprimée en unités u, $V(X)$ est en unité u^2, et σ_X en unités u.
3. (*Homogénité et invariance par translation*). Si a, b sont deux réels :
$$V(ax+b) = a^2 V(X)$$
4. La variable aléatoire $\dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$ est centrée réduite.

3 Densités uniformes sur un segment

A) Définition

■ **Définition 8** .... [Loi $\mathscr{U}(a,b)$]
Soit $a < b$ deux réels et I un intervalle d'extrémités a, b. X suit une loi uniforme sur l'intervalle I si elle admet pour densité :
$$u_{a,b} = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}$$
On note $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(a,b)$.

Ne pas confondre

	loi $\mathcal{U}(n)$	loi $\mathcal{U}(a,b)$
loi :	discrète	à densité
$X(\Omega)$	$\{1 \dots n\}$	$[a,b]$
$E(X)$	$(n+1)/2$	$a+b/2$
$V(X)$	$(n^2-1)/12$	$(b-a)^2/12$

■ **Remarque 6.**
C'est la loi qui n'accorde aucune préférence (aucun biais) à tout réel de I. Le caractère ouvert ou fermé des extrémités n'intervient pas.

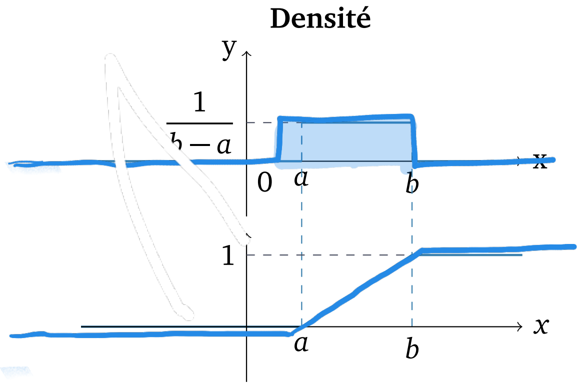
B) Fonction de répartition

■ **Proposition 7** .... [Fonction de répartition]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(a,b)$, sa fonction de répartition est la fonction :
$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

C) Graphique

Densité



Fonction de répartiton

- nul en dehors de $[a,b]$
- constant sur $[a,b]$
- Max $= \dfrac{1}{b-a}$

Cas particulier : $[a,b] = [0,1]$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

D) Moments

■ Proposition 8 .... [Moments de la loi $\mathscr{U}(a,b)$]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(a,b)$, X admet une espérance et une variance et :

1. $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.
2. $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

E) Simulation

```python
from random import random
def unif(a,b):
    retrurn a+(b-a)*random()
```

repose sur prop2 et exemple 3

F) Propriétés complémentaires

■ Proposition 9 .... [Proportion]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(a,b)$, alors pour tout intervalle J, $P(X \in J) = \dfrac{M-m}{b-a}$ où m, M sont les extrémités de l'intervalle $J \cap [a,b]$.

■ Remarque 7.
Résultat à la base des méthodes de simulation.

■ Proposition 10 .... [Invariance par translation affine]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(0,1)$, pour tous réels $a > 0$ (resp. $a < 0$) et b, la variable $Y = aX + b$ suit une loi $\mathscr{U}(b, a+b)$ (resp. $\mathscr{U}(a+b, b)$).

4 Densités exponentielles (analogue continu des lois géométriques)

A) Définition

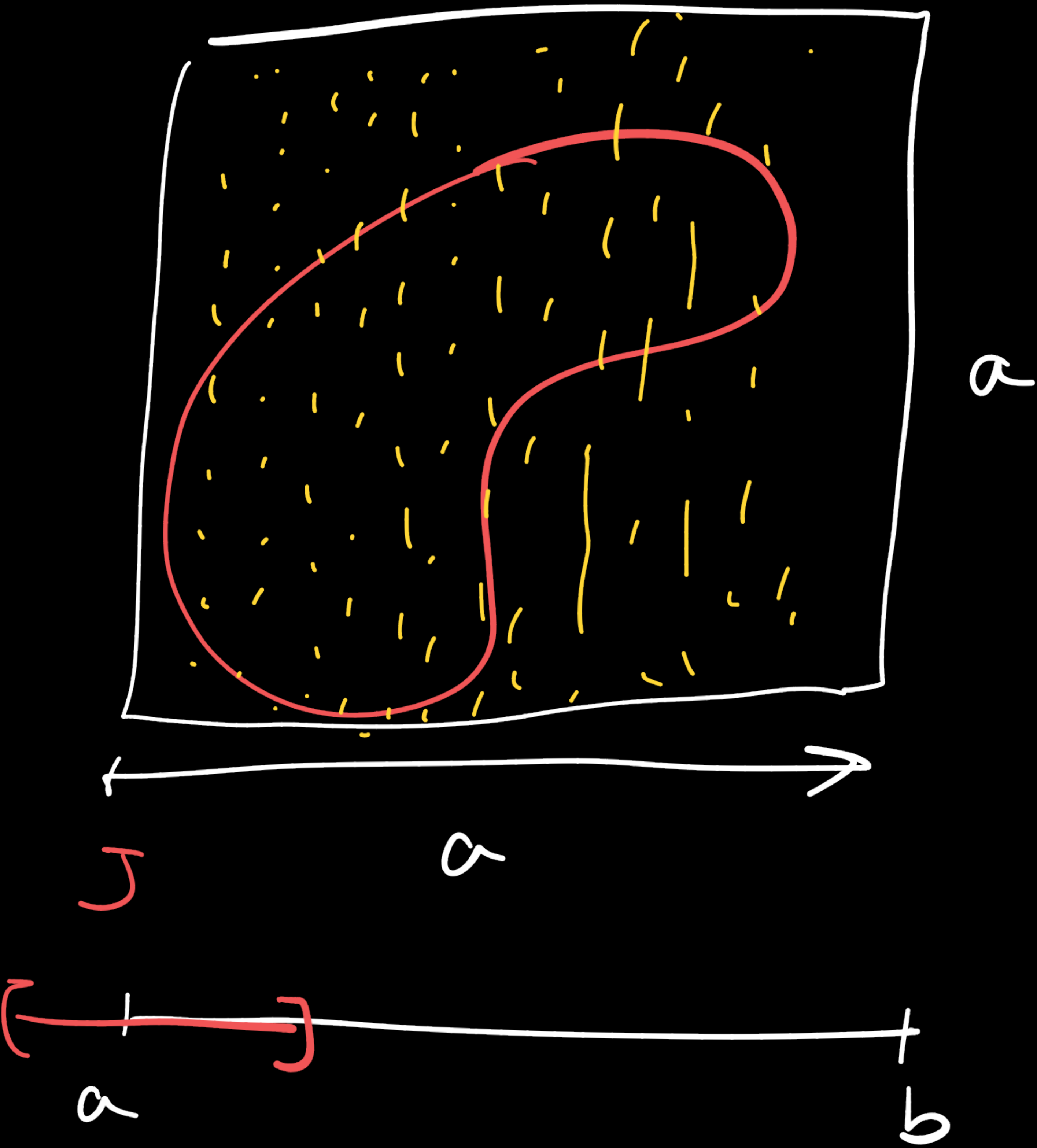
■ Définition 9 .... [Loi exponentielle de paramètre λ]
Soit $\lambda > 0$. La VAR X suit une loi exponentielle de paramètre λ si elle admet pour densité :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

■ Proposition 11 .... [Fonction de répartition]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$, sa fonction de réaprtition est la fonction donée par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad F_\lambda(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



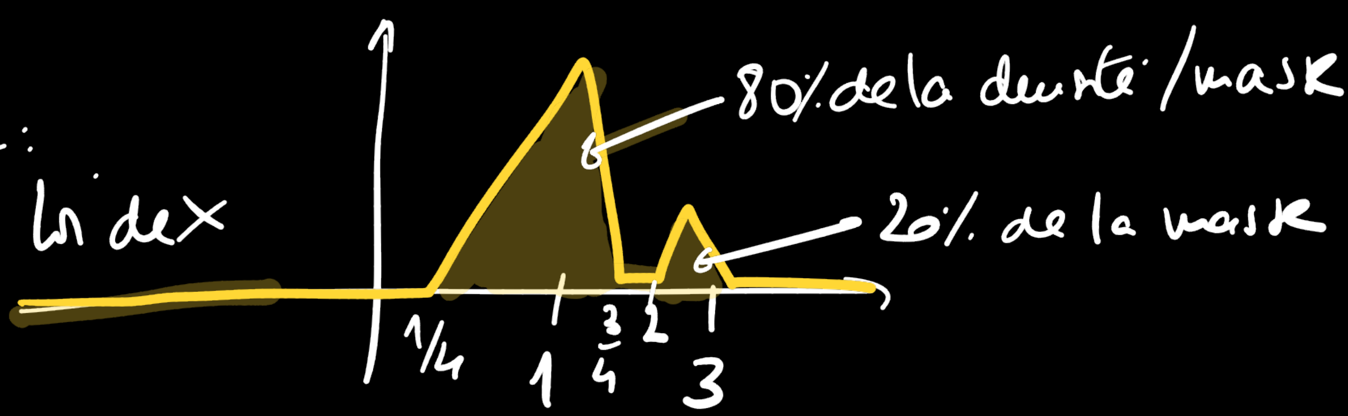
a
a
J
a
b

déf : - - - - - - - - - - - - - - - . . . . [Simuler une VAR à densité]

Soit X une VAR à densité de densité f_X.

Simuler X, c'est programmer une fonction dont l'appel produit des valeurs x telles que l'évènement $a \leq x \leq b$ est observé à la fréquence acceptablement proche de $P(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(t)dt$

Exemple:
loi de X



simuler X, c'est programmer f tel que

$f()$ renvoie des valeurs entre $1/4$ et $3,1$ (à la louche), en respectant la loi de X :

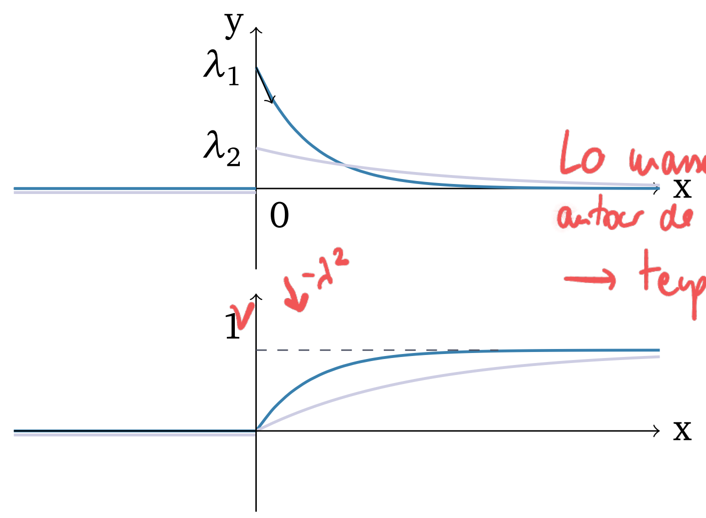
les valeurs autour de 1 sont les plus fréquentes.

P.ex : • dans 80% des cas, f renvoie des valeurs comprises entre $1/4$ et $3/2$

• dans 20% des cas f produit une valeur entre 2 et 3 (et symétriquement répartis autour de $2,5$).

B) Graphique ($\lambda_1 > \lambda_2$)

Densité



Fonction de répartition

La masse se concentre autour de 0 quand $\lambda \nearrow$.
→ temps d'attente ↘

← bien connu dans le cours de PC

C) Moments

■ **Proposition 12** .... [Moments de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors X admet une epsérance et une variance et

1. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$. ← temps d'attente moyen de survenue du 1er évènement d'intérêt
2. et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

D) Simulation

On utilise le fait que si $U \rightsquigarrow \mathscr{U}(0,1)$ alors $X = -\dfrac{1}{\lambda} \ln U \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$ (à prouver : par la méthode classique).

■ **Exercice 2.** Tombé à l'écrit et souvent à l'oral !
Le faire !

```
from random import random
from numpy import log
def expo(mu):
  return -1/mu * log(random())
```

E) Propriétés complémentaires

■ **Proposition 13** .... [Absence de mémoire]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors :$\forall (T,t) \in \mathbf{R}_+^{\star 2}$

$$P(X > T + t | X > T) = P(X > t)$$

■ **Proposition 14** .... [Changement d'échelle]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors pour $a > 0$, $aX \rightsquigarrow \mathscr{E}\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)$

■ **Exercice 3.**
Soit $\alpha > 0$, et (p_N) une suite de réels de $]0,1[$ telle que $p_N \underset{N\to\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{N}$. Soit $(X_N)_{N\geq 1}$ une suite de VAR de loi $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^*}(p_N)$.
Montrer que pour tout réel $t > 0$: $P\left(\dfrac{X_N}{N} > t\right) \underset{N\to\infty}{\sim} e^{-\alpha t}$.

Autrement dit, pour N assez grand, la loi de $\dfrac{X_N}{N}$ est approximativement exponentielle de paramètre α.

Exercice 3 $\quad X_N \rightsquigarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p_N)$

où $p_N \underset{N\infty}{\sim} \frac{\alpha}{N}$ (avec $\alpha>0$ fixé).

idée : $E(X_N) = \frac{1}{p_N} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{N}{\alpha}$.

Si je me ramène à un tps d'attente fixe :

$$E\left(\frac{X_N}{N}\right) \sim \frac{1}{\alpha}.$$

→ les bâtons de la loi de X_N se densifient en divisant par N : $\frac{X_N}{N} \underset{\text{à peu près}}{\rightsquigarrow} \mathcal{E}(\alpha)$.

Je suppose t entier (j'ai déjà traité le cas $t \notin \mathbb{N}$ dans l'exercice ....

Soit $u_N = P\left(\frac{X_N}{N} > t\right) = P(X_N > Nt)$

$$\underset{X_N \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p_N)}{=} (1-p_N)^{Nt}$$

Je cherche un équivalent de u_N qd $N \to +\infty$.

Je considère pour cela $v_N = \ln u_N = Nt \ln(1-p_N)$

$$\underset{N\infty}{\sim} -Nt \cdot \frac{\alpha}{N}$$ par éq. usuel $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$

$$v_N \underset{N\to\infty}{\sim} -\alpha t.$$

donc $\quad v_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha t$

or $\quad u_N = e^{v_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\alpha t}$ par composition des limites.

Comme $e^{-\alpha t} \neq 0$ $\quad \boxed{u_N \underset{N\infty}{\sim} e^{-\alpha t}}$

Exercice 2   S : $U \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$, $X = -\frac{1}{\lambda} \ln U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

T132

1-a. Espace image de X :

U prend ses valeurs q.c. dans $]0,1[$ q.c. car $U \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$. Donc :

$\ln U$ prend q.c. ses valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$

donc, comme $\lambda > 0$ $X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$ prend des valeurs q.c. dans $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{R}_+^* \text{ q.c.}} \quad (*)$$

1-b $I =]0, +\infty[$

2 a) Calcul de $F_X(t)$ pour $t < 0$

$P(X \leq t) = \boxed{F_X(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0}$ d'après $(*)$

2b) $t \in]0, +\infty[$.

$$[X \leq t] = [-\tfrac{1}{\lambda}\ln U \leq t]$$
$$= [\ln U \geq -\lambda t] \text{ car } -\lambda < 0$$
$$= [U \geq e^{-\lambda t}] \text{ car exp est bijective et } \nearrow\text{te}$$

2c D'où : $\forall t > 0$

$$F_X(t) = P(U \geq e^{-\lambda t})$$
$$= 1 - P(U < e^{-\lambda t}) \text{ en passant à l'év}^{t} \text{ contraire}$$
$$= 1 - P(U \leq e^{-\lambda t}) \text{ car } U \text{ est à densité (th 1. 3°)}$$
$$= 1 - F_U(\underbrace{e^{-\lambda t}}_{z})$$

$F_U(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ z & z \in [0,1] \\ 1 & z > 1 \end{cases}$

$$= 1 - z \text{ car } z \in [0,1] \text{ en effet : } t > 0, \ -\lambda t < 0$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

2d. Synthèse :

$$\boxed{F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$

3 a) On reconnaît en $F_X(t)$ la Fonc de rép. d'une VAR de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. D'après Co 1, $U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

5 Densités gaussiennes

A) Définition

■ Définition 10 .... [Loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$]

1. Soit $m \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$. La VAR X suit une loi normale de paramètres m, σ^2 si elle admet pour densité :

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

2. La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée loi normale centrée réduite.

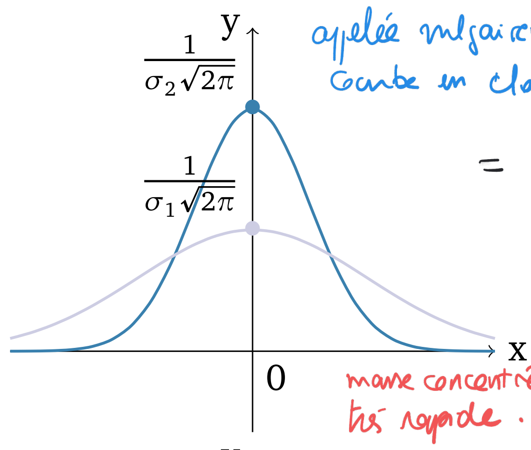
■ Définition 11 .... [Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite]

Fonction notée Φ.

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

B) Graphique $(\sigma_1 > \sigma_2), m = 0$

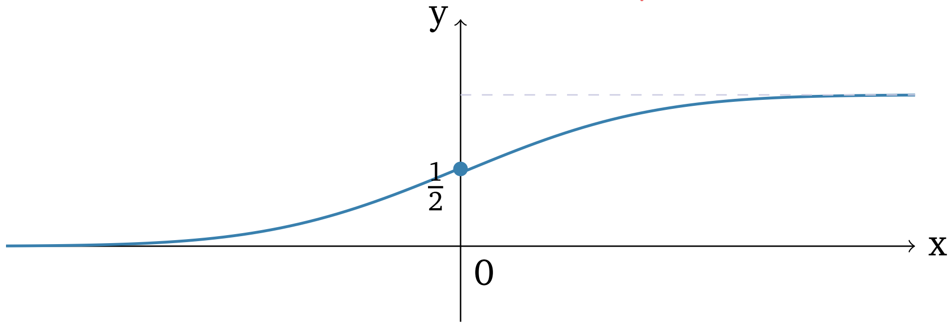
Densité



appelée vulgairement courbe en cloche.

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\, 2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

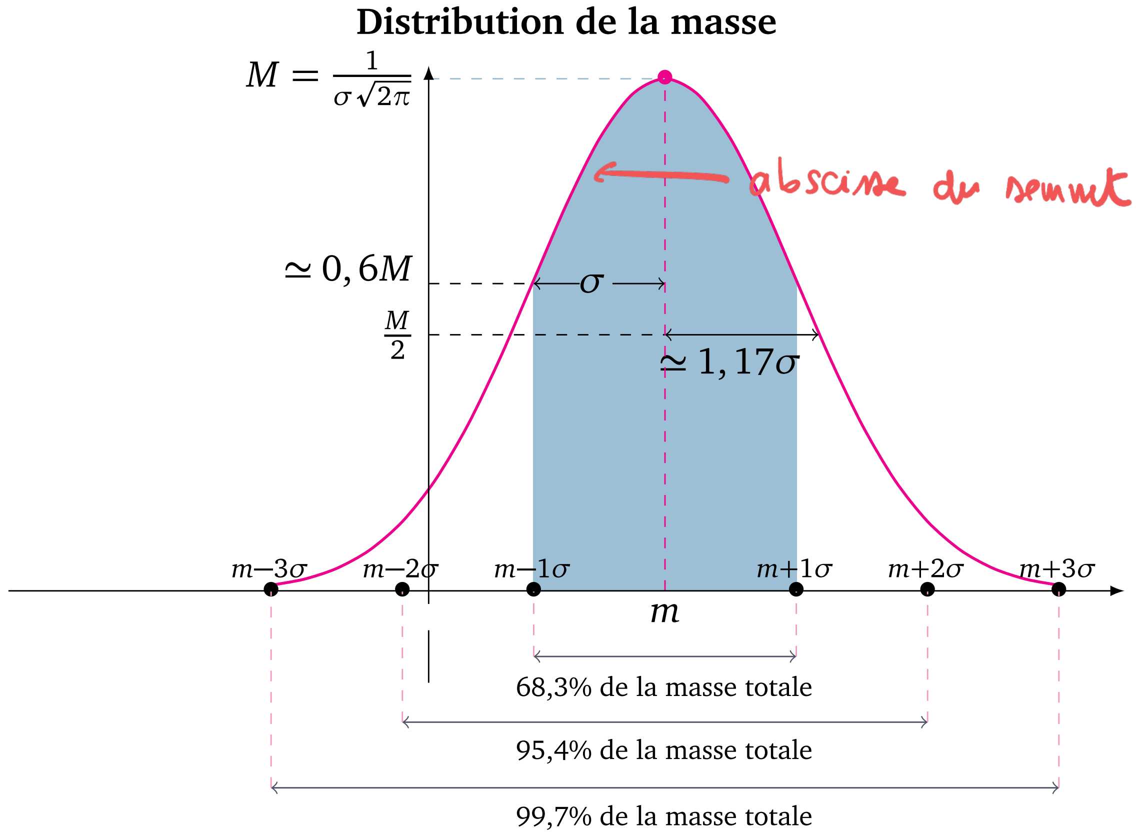
masse concentrée, décroissance très rapide.



Fonction de répartition (sigmoïde)

C) Interprétation graphique des paramètres

$\sigma \simeq$ ½ largeur au ½ maximum



X

D) Moments

paramètres de forme : indiquent la géométrie de la distribution

■ **Proposition 15** .... [Moments de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$]

Si $\rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et :

1. $E(X) = m$.
2. $V(X) = \sigma^2$

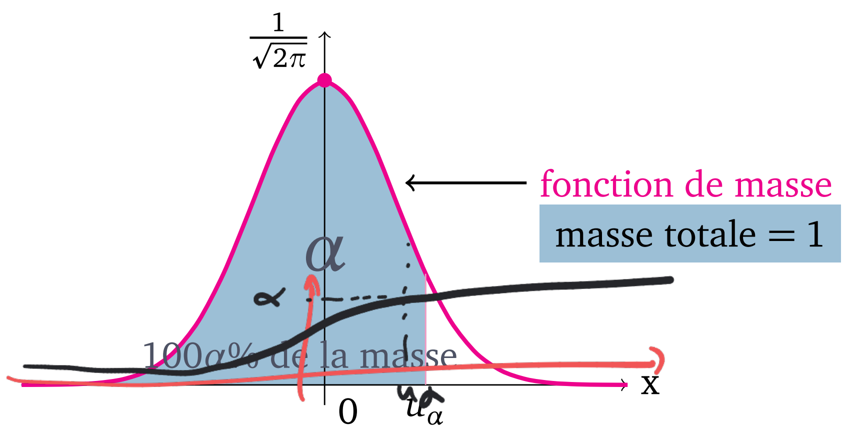
Très utile en stats. Sans intérêt math.

E) Quantiles de la loi normale

■ **Définition 12** .... [Quantile d'ordre α]

Pour $\alpha \in [0, 1]$, c'est l'unique réel u_α tel que $\Phi(u_\alpha) = \alpha$.

Φ fonction de rep de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (déf 11)



■ **Remarque 8.**
Interprétation : u_α est l'abscisse au bout de laquelle on accumule la fraction α de la masse totale de la densité.

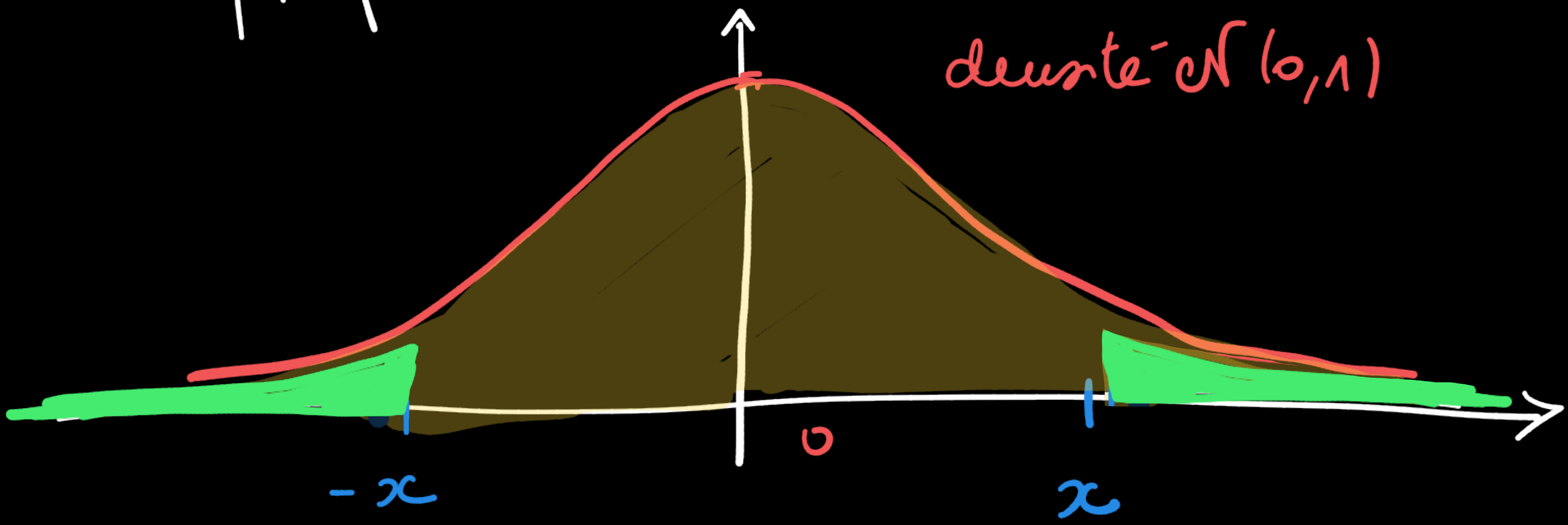
■ **Proposition 16** .... [Symétrie]

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1.$

F) Simulation

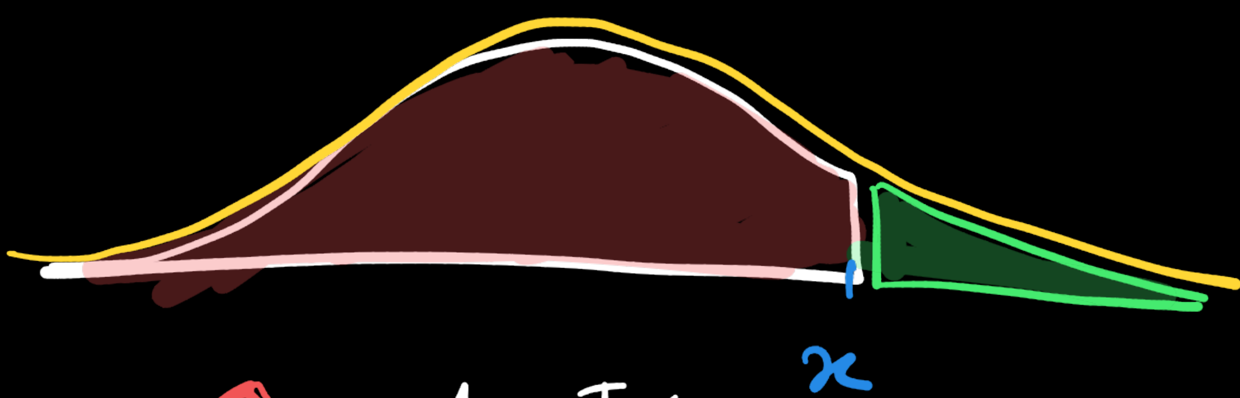
Pas de méthode de simulation explicitement au programme.

Voir le formulaire python SCAV si besoin preuve prop 16.



 $= 1$

 $= \Phi(-x)$



$\Phi(x) =$  $= 1 - \Phi(-x)$ ■

G) Propriétés complémentaires

■ Proposition 17 .... [Invariance par transformation affine]
Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ alors pour tous réels $a \neq 0$ et b, la variable $Y = aX+b$ suit une loi $\mathcal{N}\left(am+b,a^2\sigma^2\right)$.

■ Définition 13 .... [Variables aléatoires mutuellement indépendantes]
Soit $n \geq 2$ et $X_1,\dots,X_n$ n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$. On dit que les variables $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si pour tous réels $t_1,\dots,t_n$ les évènements $[X_1 \leq t_1],\dots,[X_n \leq t_n]$ sont mutuellement indépendants.

■ Théorème 5 .... [*Somme de variables gaussiennes indépendantes*]
Soit $n \geq 2$ un entier. Si $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$, ..., $X_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_n,\sigma_n^2)$ sont n variables **mutuellement indépendantes**, alors $S = X_1+\dots+X_n$ suit aussi une loi normale, de paramètres $m = m_1+\dots+m_n$, $\sigma^2 = \sigma_1^2+\dots+\sigma_n^2$.

6 Loi d'une somme de variables indépendantes : intégrale de convolution

A) Résultat fondamental

■ Théorème 6 ... Pas à retenir. Sera toujours rappelé ... [*Loi de $X+Y$*]
Soit X et Y sont deux variables aléatoires à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ et mutuellement indépendantes, de densité respectives f_X et f_Y. Soit $Z = X+Y$. Si pour tout réel x (sauf au plus un nombre fini), l'intégrale suivante, appelée *intégrale de convolution* :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_1(t)f_2(x-t)}_{\text{l'intégrande est fonction de } t \text{ et } x}\mathrm{d}t$$

existe, alors :

1. La variable Z est à densité.
2. Une densité f_Z de Z est g.

La convergence ne sera pas demandée. On vous demandera seulement le calcul.

B) Méthode de calcul d'une intégrale de convolution

■ Définition 14 .... [support d'une fonction positive]
Soit h une fonction positive définie sur $\mathbf{R}$. Le support de h est l'ensemble $S(h) = \{t \in \mathbf{R} \quad h(t) > 0\}$.

■ Proposition 18 .... [Formule donnant l'intersection de deux intervalles]
Soit a,b,c,d quatre nombres, finis ou non. En convenant que $+\infty$ est plus grand que tout réel (et que $-\infty$ est plus petit que tout réel), alors $]a,b[\cap]c,d[$ est :

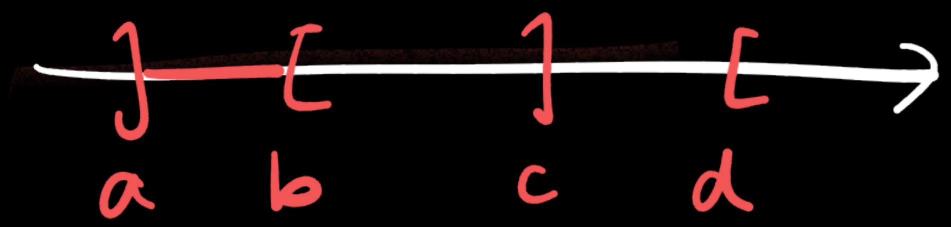
1. vide si $b < c$ ou si $d < a$.
2. non vide si $b \geq c$ et $d \geq a$ et dans ce cas :

$$\boxed{]a,b[\cap]c,d[=]\max(a,c),\min(b,d)[}$$

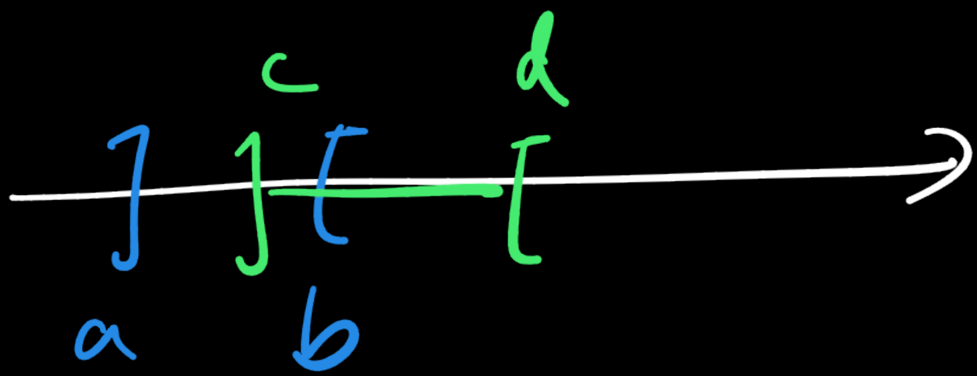
■ Exemple 5.
Convolution de deux densités exponentielles de paramètres distincts. facile

■ Exemple 6.
Convolution de deux densités uniformes. plus difficile

Illustre prop. 18



$]a,b[\,\cap\,]c,d[\, = \emptyset$



$]a,b[\,\cap\,]c,d[\, = \,]c,b[$

T133 Comment calculer la loi de $Z = X + Y$ par convolution

L'énoncé rappellera toujours que la loi de Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_X(t) f_Y(x-t) \mathrm{d}t}_{h(t)} .$$

1. On fixe d'abord x (= la variable de f_Z), et on raisonne avec t pour déterminer le **support** de h. Cela donne pour des constantes réelles a, b, c, d *souvent dépendantes de* x, ou infinies :

$$\begin{aligned} h(t) > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad f_X(t) > 0 \quad \textbf{et} \quad f_Y(x-t) > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad t \in]a, b[\quad \textbf{et} \quad t \in]c, d[\\ & \Leftrightarrow \quad [t > a \text{ et } t > c] \text{ et } [t < b \text{ et } t < d] \\ & \Leftrightarrow \quad t \in]\underbrace{\max(a,c)}_{\alpha}, \underbrace{\min(b,d)}_{\beta}[\end{aligned}$$

2. Maintenant que $]\alpha, \beta[$ est déterminé, on oublie t et on raisonne avec x pour simplifier l'expression de $]\alpha; \beta[$:

a) Calcul $\alpha = \max(a, c)$ en résolvant l'inéquation $a \leq c$:

— Si cette expression dépend de x, on détermine pour quelles valeurs critiques éventuelles A de x on a $a = c$ (souvent au plus une seule).

— Sinon, le calcul de α est immédiat.

b) On calcule de même $\beta = \min(b, d)$ avec des éventuelles valeurs critiques B de x, et les mêmes remarques que pour A.

3. On synthétise les résultats obtenus en **2.** en remplissant le tableau suivant, semblable à un tableau de signe (attention à placer les éléments $A, B, \ldots$ dans le bon ordre) :

x	$-\infty$	A	B	$+\infty$
$\alpha =$				
$\beta =$				
$]\alpha; \beta[=$				

4. On complète le tableau en vérifiant la *non-vacuité* de $]\alpha; \beta[$ (non vide ssi $\alpha < \beta$) :

a) pour chaque colonne du tableau, on résout l'inéquation $\alpha < \beta$, ce qui induit éventuellement des nouvelles valeurs critiques de x *à reporter* en ligne d'en-tête du tableau

b) De même qu'en **3.**, on complète le tableau en ajoutant à ce dernier les lignes nécessaires comme indiqué ci-dessous :

x	$-\infty$	A	B	$+\infty$
$\alpha \ =$				
$\beta \ =$				
$]\alpha; \beta[=$				
$\alpha \ < \ \beta$?(**O/N**)				
$f_Z(x) \ = \ \int_\alpha^\beta h \ =$				

5. Par définition de $]\alpha, \beta$, $f_Z(x) = 0$ dans les colonnes contenant des **N**, et sinon, on calcule l'intégrale pour les colonnes contenant des **O**, ce qui donne l'expression de $f_Z(x)$ pour tout réel x.

Exemple 5 :

données :
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$
- $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$
- X et Y sont indépendants.
- $Z = X+Y$ est à densité et que
$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$$
- $\lambda \neq \mu$.

Calculer f_Z.

T133

1– $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$

la variable

n'existe pas. (muet)

On fixe x et on détermine pour quelles valeurs de t, l'intégrande $h(t) = f_X(t) f_Y(x-t)$ est >0.

$$h(t) > 0 \iff f_X(t) > 0 \text{ et } f_Y(x-t) > 0$$
$$\iff t \geq 0 \text{ et } x-t \geq 0$$

car la densité exponentielle est non nulle sur $\mathbb{R}+$.

$$\iff t \in \left]0,+\infty\right[\text{ et } t \in \left]-\infty, x\right[$$

point central du raisonnement $\quad \iff t \in \left]\max(-\infty,0), \min(x,+\infty)\right[$

$$\iff t \in \left]0, x\right[$$

2a) $t \in \left]\underbrace{0}_{\alpha}, \underbrace{x}_{\beta}\right[= I$ $\leftarrow$ simplification terminée car les min / max ont été calculés.

La non-vacuité de I dépend du signe de x

substantif dérivé de vide

x	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
3 $\quad \alpha =$	0	0
$\beta =$	x	x
$]\alpha,\beta[=$	$]0, x[$	$]0, x[$
4a $\quad \alpha < \beta$?	N	O
$]\alpha,\beta[$	$\varnothing$	$]0, x[$
5 $\quad f_Z(x) =$	0	$\int_0^x f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$

Reste à calculer $f_Z(x)$ pour $x > 0$.

$$f_Z(x) = \int_0^x e^{-\lambda t} e^{-\mu(x-t)}\,dt$$

Or $\quad e^{-\lambda t} e^{-\mu(x-t)} = e^{-\mu x} \cdot e^{(\mu-\lambda)t}$

donc $\quad f_Z(x) = e^{-\mu x} \int_0^x e^{(\mu-\lambda)t}\,dt$

Comme $\mu - \lambda \neq 0$ (car $\lambda \neq \mu$), on primitive à vue en :

$$f_Z(x) = e^{-\mu x}\left[\frac{e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}\right]_0^x$$
$$= \frac{e^{-\mu x}}{\mu-\lambda}\left(e^{(\mu-\lambda)x} - 1\right)$$
$$f_Z(x) = \frac{1}{\mu-\lambda}\left[e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}\right]$$

Finalement : $\boxed{f_Z(x) = \mathbb{1}_{x \geq 0}(x) \times \left(\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Exemple 6. Même question et mêmes notations qu'en exemple 5, mais ici :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}(2,5)$$
$$Y \rightsquigarrow \mathcal{U}(0,1)$$

$$f_Y(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \qquad f_X(t) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[2,5]}(t)$$

f_Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\, dt$$

T_{133}

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{1}_{[0,1]}(t) \times \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[2,5]}(x-t)}_{h(t)}\, dt$$

1_ On fixe x et on cherche pour quelles valeurs de t, $h(t) > 0$:

$$h(t) > 0 \iff \mathbb{1}_{[0,1]}(t) > 0 \text{ et } \mathbb{1}_{[2,5]}(x-t) > 0$$
$$\iff 1 \geq t \geq 0 \text{ et } 5 \geq x-t \geq 2$$
$$\iff t \geq 0 \text{ et } t \leq 1 \text{ et } 5 \geq x-t \text{ et } x-t \geq 2$$
$$\iff t \geq 0 \text{ et } t \leq 1 \text{ et } t \geq x-5 \text{ et } t \leq x-2$$
$$\iff [t \geq 0 \text{ et } t \geq x-5] \text{ et } [t \leq 1 \text{ et } t \leq x-2]$$
$$\iff t \geq \max(0, x-5) \text{ et } t \leq \min(1, x-2)$$
$$\iff \boxed{t \in [\underbrace{\max(0,x-5)}_{\alpha}, \underbrace{\min(1, x-2)}_{\beta}]}$$

Valeurs pivots pour α : $\boxed{x = 5}$ A

β : $\boxed{x = 3}$ B (lorsque $x - 2 = 1$)

x	$-\infty$ … 3	3 … 5	5 … $+\infty$
$\alpha = \max(0, x-5) =$	0	0	$x-5$
$\beta = \min(1, x-2) =$	$x-2$	1	1
$]\alpha, \beta[=$	$]0, x-2[$	$]0,1[$	$]x-5, 1[$

x	$-\infty$ … 2	2 … 3	3 … 5	5 … 6	6 … $+\infty$
$\alpha < \beta$?	N	O	O	O	N
$f_Z(x) =$	0	$\int_0^{x-2} h$	$\int^1 h$	$\int_{x-5}^1 h$	0

T_{133} 4a) : La question $\alpha < \beta$ introduit des nouvelles valeurs critiques.

$x - 2 = 0$?

$x - 5 = 1$

i.e. $\boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ x = 6 \end{matrix}}$

D'après l'expression de $h(t)$, $h(t)$ vaut $1/3$ quand elle est non nulle :

Finalement : $f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(x-2) & \text{si } x \in [2,3] \\ \frac{1}{3} & \text{si } x \in [3,5] \\ \frac{1}{3}(6-x) & \text{si } x \in [5,6] \\ 0 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$

densité de $Z = X+Y$