Programme de colles
Semaine 17 du 2/02 au 06/02/2026

Intégrales généralisées (impropres)

- Convergence d'une intégrale d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.
- Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sauf en un nombre fini de points.
- Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
- Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.
- Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres.
- Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Cas des fonctions paires ou impaires.
- Théorème de comparaison de deux fonctions positives.
- Si deux fonctions positives sont équivalentes en b alors les deux intégrales, impropres en b, $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.
- Convergence absolue d'une intégrale généralisée.
- La convergence absolue est une condition suffisante de convergence.
- L'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Variables aléatoires réelles (VAR) à densité

- Densité de probabilité : f positive sur $\mathbf{R}$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f$ converge et vaut 1.
- Variable aléatoire réelle à densité.
- Si f est une densité de probabilité, alors il existe une VAR à densité X dont f est une densité.
- Fonction de répartition d'une VAR de densité f_X : $\forall x \in \mathbf{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$
- Si I est un intervalle, expression de $\mathbf{P}(X \in I)$ à l'aide d'une intégrale portant sur f_X.
- Caractérisation d'une VAR à densité à l'aide de sa fonction de répartition F_X :
  X admet une densité ssi F_X est continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Dans ca cas, la fonction f obtenue en posant $f(t) = F_X'(t)$ lorsque c'est possible, et $f(t) = 0$ sinon est une densité de X.
- Exemples simples de composées d'une VAR à densité X par une fonction $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$:
  - $*$ on admet que $Y = g(X)$ est une VAR.
  - $*$ Y est une VAR discrète ssi $Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
  - $*$ Y admet une densité ssi F_Y vérifie la caractérisation précédente.
- Moments d'une VAR à densité. Espérance $\mathbf{E}(X)$, variance $\mathbf{V}(X)$ (écart-type $\sigma(X)$).
- Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance.
- Théorème de transfert.
- Variance de $aX + b$.
- Théorème de König-Huygens.
- VAR centrée, réduite. Si X est une VAR admettant une variance non nulle, alors $X^\star = \dfrac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la VAR centrée réduite associée à X.
- Loi uniforme sur $[a, b]$: $\mathcal{U}\big([a, b]\big)$, densité, fonction de répartition, espérance, variance.
- Loi exponentielle : $\mathcal{E}(\lambda)$, densité, fonction de répartition, espérance, variance.
- Loi normale (ou gaussienne) centrée réduite : $\mathcal{N}(0, 1)$, densité notée φ, espérance, variance.
- Loi normale de paramètres μ, σ^2 : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, densité, espérance, variance.
- Si X suit une loi normale, alors $\forall a, b\,(a \neq 0)$, $aX + b$ suit une loi normale.
  En particulier, $X^\star$ suit une loi normale centrée réduite.

Questions de cours :

1. Définition de la convergence d'une intégrale généralisée $\int_a^b f$ si f est continue sur $[a, b[$.
2. Définition de la convergence d'une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f$ si f est continue sur $[a, +\infty[$.
3. Donner la relation de Chasles pour les intégrales impropres.
4. Donner le théorème de comparaison pour les intégrales impropres.
5. Donner le théorème de convergence d'intégrales de fonctions équivalentes.
6. Définiton de l'absolue convergence et du critère de convergence d'une intégrale généralisée.
7. Théorème d'intégration par parties pour une intégrale généralisée.
8. Donner la définition d'une densité de probabilité.
9. À quelles conditions sur sa fonction de répartition une VAR X admet-elle une densité ? Comment dans ce cas définir une densité de X ?
10. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette un moment d'ordre r et le définir.
11. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette une espérance et la définir.
12. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette une variance et la définir.
13. Donner espérance et variance de $Y = aX + b$ en précisant les conditions.
14. Citer le théorème de transfert.
15. Définir la variable centrée réduite associée à une VAR X en précisant les conditions.
16. Densité, fonction de répartition, espérance et variance de la loi uniforme sur $[a, b]$.
17. Densité, fonction de répartition, espérance et variance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
18. Densité, fonction de répartition, espérance et variance d'une loi normale de paramètres μ, σ^2.
19. Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.
20. Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi normale d'espérance 1 et de variance 1.