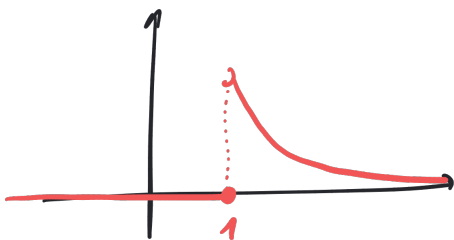


Q4 ① Commencer toujours par tracer la densité



- 1- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2- f est C^0 sur $] -\infty, 1[$ et $] 1, +\infty[$ (restriction de fonctions puissances, donc continue).
 $\rightarrow C^0(\mathbb{R})$ sauf en un nb fini de points au plus.
- 3- positive? Oui si $\lambda \geq 0$.

- Convergence de l'intégrale:

Étudier le pb en 1. f sur $] 1, +\infty[$ se pose par continuité en 1: pas d'impropriété en 1

Étudier le pb sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\rightarrow$ en tout point réel $\neq 1$, f est C^0 : pas d'impropriété.

Étudier le pb pour $-\infty$ $\rightarrow$ $-\infty$ est une impropriété, mais f est nulle sur $] -\infty, 1[$

Conclusion: unique impropriété en $+\infty$.

Étude $\rightarrow$ on introduit les intégrales partielles:

$$\begin{aligned} \forall x > 1 \quad I(x) &= \int_1^x \frac{\lambda}{t\sqrt{t}} dt = \int_1^x \lambda t^{-3/2} dt \\ &= \left[\frac{\lambda}{1-3/2} t^{1-3/2} \right]_1^x \\ &= \left[-2\lambda t^{-1/2} \right]_1^x \\ &= -2\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \quad (*) \\ &= 2\lambda + o(1) \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

donc f est une densité si $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

À côté de l'équation: Ce calcul donne la fonction de rep pour $x > 1$ puisque pour $x > 1$: $\int_{-\infty}^x f = \int_1^x f$

T132

loi de la VAR $Y = \ln X$

X prend ses valeurs q.c. dans $] 1, +\infty[$

①

donc $Y \dots \dots \dots \mathbb{R}_+$

$$Y(\Omega) = \mathbb{R}_+ \text{ q.c.}$$

Calcul de la fonction de rep de Y .

②

Si $t < 0$: $F_Y(t) = 0$. (1)

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \mathbb{R}_+: [Y \leq t] &= [\ln X \leq t] \\ &= [X \leq e^t] \text{ car exp est } \nearrow \text{ et bijective} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } F_Y(t) = F_X(e^t)$$

$$\text{Comme } t \in \mathbb{R}_+ \quad u = e^t \geq 1$$

$$\text{Comme } F_X(u) = 1 - \frac{1}{\sqrt{u}} \text{ pour } u \geq 1$$

$$\text{on obtient } F_Y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{e^t}} = 1 - e^{-t/2} \quad (2)$$

③

On reconnaît dans (1) et (2) en F_Y la f.d.rep d'une loi $\mathcal{E}(1/2)$. Comme la f.d.rep détermine la loi: $Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(1/2)$

```
def simulX():
    Y = expo(1/2)
    X = np.exp(Z)
    return X
```

pour simuler X : on simule Y avec
 # expo et on renvoie le ln de cette simul.

