Exercice III X_A = la VAR égale à la durée vie de l'ampoule

X_B = durée vie !

Fixons $t \in \mathbb{R}$ et calculons $F_X(t) = P(X \leq t)$

Soit C_A "on a tiré l'ampoule A" — à dénombrer

La formule des probas totales avec le SCE $(C_A, \overline{C_A})$

donne

$$P(X \leq t) = P(X \leq t) P(C_A) + P_{\overline{C_A}}(X \leq t) P(\overline{C_A})$$

$$= P(X_A \leq t)\, p + P(X_B \leq t)\, q \quad (q = 1-p)$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = p F_{X_A}(t) + q F_{X_B}(t)}$$

$$F_X = p F_{X_A} + q F_{X_B}$$

C'est une combinaison CL de deux fonctions $C^1(\mathbb{R})$ et $C^1(\mathbb{R})$ cqf en 0 puisque $X_A \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, $X_B \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$

Alors F_X est $C^1(\mathbb{R})$ $C^1_{\text{tronqué}}$ cqf en 0.

Conclusion : X est une VAR à densité (Ex 2)

- On détermine une densité f_X pour F_X en dérivant F_X là où elle possède

$$\boxed{f_X = p f_{X_A} + q f_{X_B}} \quad (*)$$

2. Espérance et variance de X

D'après (*) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^2 f_X(x) = p \cdot x^2 f_{X_A}(x) + q\, x^2 f_{X_B}(x)$$

Un IR leur intégrale converge absolument

Ce qui veut dire $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$ converge absolu^t

Alors X admet un moment d'ordre 2, donc E(X) et V(X) existent

Par linéarité de $\int$ et formule de transfert

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = p \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_A}(x)\,dx + q \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_B}(x)\,dx$$

$$= p E(X_A^2) + q E(X_B^2)$$

$$= \frac{p}{a} + \frac{q}{b} \quad \text{car } X_A \hookrightarrow \mathcal{E}(\cdot)$$

De même

$$E(X^2) \underset{n=2}{=} p E(X_A^2) + q E(X_B^2)$$

Moment d'ordre 2 d'une VAR exponentielle

$Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad E(Z) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\rightarrow$ Koenig $\quad E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2$

$$\boxed{E(Z^2) = \frac{2}{\lambda^2}}$$

Ainsi : $E(X^2) = \frac{2p}{a^2} + \frac{2q}{b^2}$

On déduit $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$2 = 1 + p + q$

$$\overset{\text{Koenig}}{V(X)} = \frac{p(2-p)}{a^2} + \frac{q(2-q)}{b^2}$$

$$V(X) = \frac{p(1+q)}{a^2} + \frac{q(1+p)}{b^2}$$

Exercice 8

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}(0,a)$ et $Y = a - X$ est une transformée affine de X, qui est uniforme

Donc d'après le cours : Y suit aussi une loi uniforme. X prenant ses valeurs dans $[0,a]$, Y aussi. Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(0,a)$

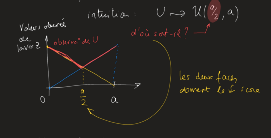
D'après le cours, E(Y), V(Y) existent et

$$E(Y) = \frac{a}{2} \quad V(Y) = \frac{a^2}{12}$$

2. loi de U.

Score du dé	1	2	3	4	5	6
Score face du dessous	6	5	4	3	2	1
Score max	6	5	4	4	5	6

intuition : $U \hookrightarrow \mathcal{U}(?, a)$



2. $U = \max(X,Y)$

U prend ses valeurs quasi certainement $[0,a]$

Donc $F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \quad \triangle\ \text{c'est ouvert} \\ 1 & \text{si } t > a \quad \triangle\ \text{c'est ouvert} \end{cases}$

Fixons $t \in [0,a]$

Calculons

$$[U \leq t] \underset{\max}{\overset{\text{def}}{=}} [X \leq t] \cap [Y \leq t]$$

$$= [X \leq t] \cap [a - X \leq t]$$

$$= [X \leq t] \cap [X \geq a - t]$$

$$= X \in [a-t, t]$$

Cet événement est impossible si $a - t > t$

i.e. $2t < a$

i.e. $t < \frac{a}{2}$

En passant aux probas :

$$\forall t \in [0,a] \quad F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, a/2[\\ P(X \in [a-t, t]) & \text{si } t \in [a/2, a] \end{cases}$$

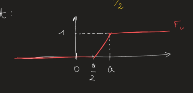
Pour $t \in [a/2, a]$

b) $P(X \in [a-t, t]) = \int_{a-t}^{t} f_X(s)\,ds$

$$= \int_{a-t}^{t} \frac{1}{a}\,ds = \frac{2t-a}{a}$$

$$= \frac{t - a/2}{a/2}$$

Finalement :



On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{U}(a/2, a)$. Comme la F d.r détermine la loi : $U \hookrightarrow \mathcal{U}(a/2, a)$

Comme en 1 : $E(U) \underset{\text{existe}}{=} \frac{3a}{4}$

$$V(U) \underset{\text{existe}}{=} \frac{a^2}{48}$$

3. On remarque que $U + V = X + Y = a$

Donc $V = a - U$

Encore une transformée affine d'une loi uniforme etc

$$V \hookrightarrow \mathcal{U}\left(0, \frac{a}{2}\right)$$

Exercice 11 $X \hookrightarrow \mathcal{U}(0,1)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(0,2)$ indépendantes

Énoncé dit : $Z = X + Y$ est à densité

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_Y(x-y)\,dy$

ne peut pas dépendre de y — muette

Méthode : ① Fixer $x \in \mathbb{R}$

② Pour ce x, déterminer $E_x = \{y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) > 0\}$

③ $f_Z(x) = \begin{cases} \int_{E_x} f_Y(y)\,dy & \text{si } E_x \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

① Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

② Cherchons $E_x = \{y \in \mathbb{R} \ \ f_Y(y) > 0\}$

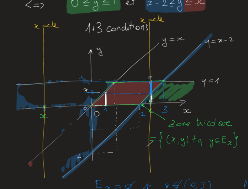
$y \in E_x \iff f_Y(y) > 0$ et $f_Y(x-y) > 0$

$\overset{\text{déf des densités } \mathcal{U}(0,1)}{\iff} y \in [0,1]$ et $x - y \in [0,1]$

$\iff 0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq x - y \leq 1$

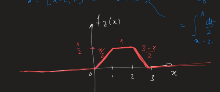
$\iff 0 \leq y \leq 1$ et $x - 1 \leq y \leq x$

4 conditions



$E_x = \emptyset$ si $x \notin [0,2]$ $\quad f_Z(x) = 0$

$E_x = [0,x]$ si $x \in [0,1]$ $\quad f_Z(x) = \int_0^x 1\,dy = x$

$E_x = [0,1]$ si $x \in [1,2]$ $\quad f_Z(x) = \int_0^1 1\,dy = 1$

$E_x = [x-1,1]$ si $x \in [1,2]$ $\quad f_Z(x) = \int_{x-1}^{1} 1\,dy = 2-x$