TD Exo 118 applications linéaires.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
vecteur : sont une 3-liste / sont une 4-liste

vecteurs de E
F

$f \in \mathcal{L}(E,F)$

DONC

Ker f contient des 3-listes
Im f ———— 4 listes

1- Calculons en coordonnées :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$

Notons $Y = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $f((x,y,z))$.

Par déf de f, $Y = \begin{pmatrix} x+(m-1)y \\ 2x-2y+2mz \\ y-4z \\ 2mz \end{pmatrix}$

Autrement dit : $Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ 2 & -2 & 2m \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}}_{A} \times X$

La matrice A obtenue est indépendante de x, y, z : ce qui prouve que :

① f est linéaire d'après le calcul matriciel

② la matrice de f sur la base canonique est A.

2. On y a répondu dans 1.

3. On fait tout en coordonnées :

Image de f : En coordonnées :

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(\text{colonnes de } A)$

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m-1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2m \\ -4 \\ 2m \end{pmatrix} \right)$

Ce qui donne une famille génératrice de Im A. Cherchons-en une base.
Pour cela : on calcule le rang de A.
On échelonne par pivot partiel.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & m-1 & 0 \\ 2 & -2 & 2m \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & m-1 & 0 \\ 0 & -2m & 2m \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2m & 2m \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & m-1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -4 \\ 0 & 0 & -6m \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 2mL_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & m-1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -4 \\ 0 & 0 & -6m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_3$$

A est échelonnée. On discute en fonction du rang de A.

c'est le rang qui dirige la discussion

1er cas : $m \neq 0$. $\operatorname{Rg} A = 3$.
Les colonnes de A forment une base de Im A.
Revenant en vecteurs :
$\mathcal{B}_{\operatorname{Im}} = ((1,2,0,0), (m-1,-2,1,0), (0,2m,-4,2m))$
est une base de Im f.

2e cas : $m = 0$. $\operatorname{rg}(A) = 2$.
donc Im f est de dimension 2.
les 2 premiers de A fournissent une base de Im f.
$\mathcal{B}_{\operatorname{Im}} = ((1,2,0,0), (-1,-2,1,0))$

Calcul du noyau : un système d'équations du noyau est donné par $(A|0)$.
Ce système a déjà été échelonné.

1er cas $m \neq 0$. D'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} f = 0$.
donc $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$

2e cas $m = 0$. $\operatorname{rg}(A) = 2$
donc $\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \operatorname{Ker} f = 1$
toujours d'après le thm du rang.

→ Un vecteur non nul du noyau en constitue une base.
D'après la forme échelonnée de A :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Col } 1 + \text{Col } 2 = -\frac{1}{4} \text{ col } 3$$

donc $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$

revenant en vecteurs :

$((1, 1, 1/4))$ est une base de Ker f.

4. f est injective $\overset{\text{cours}}{\iff} \operatorname{Ker} f = \{0\}$
$\iff m \neq 0$

f est surjective : jamais car $3 \neq 4$.

f est isom : jamais car jamais surjective.

Exo 121 : $D : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{array}$

$\boxed{\text{vecteur} = \text{fonction } C^\infty(\mathbb{R})}$

1 – . On sait que $\frac{d}{dx}$ est linéaire d'après le cours sur la dérivation.

. Si $f \in C^\infty$, $f' \in C^\infty$ donc, D est bien dans $\mathcal{L}(E)$.

– Il n'est pas injectif puisque

$$\mathbb{1} \neq 0 \text{ mais } D(\mathbb{1}) = 0.$$

le noyau de D contient un vecteur non nul.

– À montrer : pour tout second membre g, l'équation

$$D(f) = g$$

admet une solution.

- Soit $g \in C^\infty$. On cherche $f \in C^\infty$ telle que $f' = g$.

C'est du cours : Soit G une primitive de g. Il en existe car d'après le cours, toute fonction C^0 admet des primitives, or g est C^∞, donc a fortiori C^0.

Comme $G' = f$ $G' \in C^\infty$ donc $G \in C^\infty$

donc $G \in E$, et $D(G) = g$

$\boxed{D \text{ est surjective}}$

Rem : D est un endom.
D est surjective.
D est non-injective.

Ceci semble contredire thm 6.

rep : NON car dans thm 6, E doit être de dimension finie.

Or $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie. Conclusion : le théorème 6 ne s'applique pas ici.

$\mathbb{R}[X] \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Comme dim $\mathbb{R}[X]$ est infinie dim E aussi.

2a) F est param : $\xrightarrow{T74}$ en séparant les var libres, j'ai la forme Vect

Vecteur = Fonction

$$(ax+b)e^x + (cx+d)e^{2x}$$
$$= a\,xe^x + b\,e^x + c\,xe^{2x} + d\,e^{2x}$$

- je note : $f_1 : x \mapsto xe^x \in E$
  $f_2 : x \mapsto e^x$
  $f_3 : x \mapsto xe^{2x}$
  $f_4 : x \mapsto e^{2x}$

$$F = \mathrm{Vect}(f_i)_{i=1}^{4} \subset E$$

donc F est un sev de E.

. Base et dimension :
- la famille $\mathcal{F} = (f_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est génératrice de F par déf de Vect.
- Elle est libre, avec des arguments de croissance à l'infini :

exemple traité dans CH7

Si $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \boxed{=} 0$

égalité de vecteurs donc de fonctions

$cf_3(x) = 0 + o(f_3(x))$ $x \to +\infty$ par croissances comparées.

en divisant par $f_3(x) \neq 0$ pour $x > 0$:

$$c = 0 + o(1)$$

Comme c est une constante $c = 0$

Ainsi de suite : $d = 0$
$a = 0$
$b = 0$.

donc $\mathcal{F}$ est une base et $\dim F = 4$.

xe^{2x}
e^{2x}
xe^x
e^x

$$cf_3 = \underbrace{-af_1 - bf_2 - df_4}_{\text{est } o(f_3)}$$

2.b) $D_F : F \longrightarrow E$
$f \mapsto f'$

- D_F est linéaire.
- le problème : est-ce un endom de F ?
  c-à-d : est-ce que si $f \in F$ $D(f) \in F$?

réponse : je calcule $D(f)$ à la main ($f \in F$) et je regarde si $D(f) \in F$.

$D_F(f_1) = f_1 + f_2$ (dérivée d'un produit)
$D_F(f_2) = f_2$.
$D_F(f_3) = f_4 + 2f_3$
$D_F(f_4) = 2f_4$.

(*)

Ces calculs montrent que $D_F(f_i) \in F$.
Par linéarité si $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 \in F$ est un vecteur quelconque de F

$$D_F(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \underbrace{D_F(f_i)}_{\in F \text{ d'après } (*)}}_{\in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \text{ puisque c'est une CL de vecteurs de } F}$$

donc D_F est endom.

2.c. Découle de (*)

Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(D_F)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

B (bloc en haut à gauche), C (bloc en bas à droite)

2.d. D'après Gauss : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}(C)$

or $\det B = 1 \neq 0$, $\det C = 4 \neq 0$
donc $\underline{\mathrm{rg}(A) = 4}$

A est inversible : D_F est un isomorphisme,
et mieux : c'est un automorphisme.

Exo 122

1 _ Fait déjà (1ère partie de Ex 120 q1).

2 _ f est diagonalisable

$\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \underline{\Phi}$ est diagonalisable

où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B}_c = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{E_1} \; \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{E_2} \; \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}}_{E_3} \; \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}}_{E_4} \right)$$

- Calculez AE pour E dans $\mathcal{B}_c$
- rangez ces vecteurs en colonnes dans $\underline{\Phi}$

$$AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad AE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AE_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AE_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ ramenés à diagonaliser une matrice 4×4.

$\underline{\Phi}$ est symétrique réelle donc diagonalisable.