

*l'archétype de l'ev
numérique de dimension finie*

CH15 – Structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire

tombe tous les ans depuis 3/4 ans.

Plan du chapitre

1	Géométrie linéaire de base	3
	A) Droite du plan	3
	B) Plan de l'espace	3
	C) Hyperplan de $\mathbb{R}^n$	4
2	Produit scalaire	4
	A) Propriétés du produit scalaire, de la norme	4
	B) Familles orthogonales	5
3	Projection orthogonale	7
	A) Orthogonal d'un sev de $\mathbb{R}^n$	7
	B) Définition	7
	C) Propriétés	7
4	Caractérisation de la projection orthogonale en termes de distance . . .	9
	A) Distance euclidienne. Distance à une partie	9
	B) Caractérisation de la projection orthogonale en termes de minimum de distance	9
5	Calculs de projections orthogonales en petite dimension	10
	A) Dimension 1 : Projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(u)$.	10
	B) Dimension 2 : Projecteur orthogonal sur le plan $F = \text{Vect}(u, v)$	10
	C) Dimension $n - 1$: Projecteur orthogonal sur un hyperplan H . .	10

Liste des définitions

Déf.1	Hyperplan de $\mathbb{R}^n$	3
Déf.2	Vecteurs orthogonaux, colonnes orthogonales	5
Déf.3	Vecteur unitaire ou normé ou normalisé	5
Déf.4	Famille orthogonale de vecteurs / <i>orthonormale de vecteurs</i>	6
Déf.5	Orthogonal du sev F <i>orthonormé</i>	7
Déf.6	Projecteur orthogonal/projection orthogonale sur un sev F	7
Déf.7	distance	9

Liste des techniques de base

T151.	Calculs de normes	5
T152.	Normalisation d'un vecteur non nul	5
T153.	Vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel F	7
T154.	Montrer qu'une application f est le projecteur orthogonal sur un sev F	8
T155.	Base orthonormée de vecteurs propres	8
T156.	Comment calculer le projeté orthogonal $\Pi_F(x)$ de x sur le s-ev F ?	10

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T₀** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4.

★

 Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

- **TYP Π_f** Projecteur orthogonal : un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.
- **TYP $\Pi_F(\mathbf{u})$** Projection orthogonale : un vecteur de F .
- **TYP $\mathbf{u}, u_j, U$** Comme d'habitude : les vecteurs sont indiqués en lettres grasses (ex : $\mathbf{u}$), leurs composantes en lettres minuscules correspondantes (ex : $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$), et leurs (matrices des) coordonnées sur la base canonique par la colonne en lettre majuscule correspondante (ex : $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}).$)

1 Géométrie linéaire de base

■ **Définition 1** [Hyperplan de $\mathbf{R}^n$]
Sous-ensemble d'équation :

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + k = 0 \quad \text{où} \quad (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$$

A) Droite du plan

Équation cartésienne :

Hors programme : not pas à connaître
Equation linéaire

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

c'est défini comme un ensemble ponct.

a, b, c : coefficients de l'équation.

1. 🦋 Si $(a, b) = (0, 0)$ ce n'est pas une droite !
2. Sinon $\mathbf{u} = (-b, a)$ en est un vecteur directeur.
3. et $\mathbf{n} = (a, b)$ en est un vecteur normal.
4. En faisant varier c , on obtient des droites parallèles toutes dirigées par $\mathbf{u}$
5. Si $c = 0$, on a une droite vectorielle (passant par $(0, 0)$). Cette droite est donc $\text{Vect}(\mathbf{u})$.

← hyperplan de $\mathbf{R}^2$

■ Exemple 1.

1. $2x + y - 3 = 0$: équation d'une droite dirigée par $\mathbf{u} = (-1, 2)$.
2. $2x + y - 5 = 0$: équation d'une droite parallèle à la précédente.
3. $x + y + 3 = 0$ et $-x + y + 2 = 0$ sont les équations de droites perpendiculaires puisqu'un vecteur directeur de l'une est normal pour l'autre

c'est un kv de dim 1.

■ Exemple 2.

Si $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & \end{pmatrix}$, $A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1, donc : -3 est valeur propre et le sv propre associé qui est $\text{Vect}((1, 1, 2))$ est $\text{Ker } A + 3I$ est de dimension 1 d'après le théorème du rang. C'est donc une droite. Une équation en est donné par la première ligne de $A + 3I$: $x - 4y = 0$. Comme un vecteur directeur de cette droite est $(4, 1)$, $\text{Ker } A + 3I = \text{Vect}((4, 1))$.

→ Tr pratique pour diagonaliser une matrice 2x2.

B) Plan de l'espace

Équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

a, b, c : coefficients de l'équation.

1. 🦋 Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ ce n'est pas un plan !

Interprétation géométrique de la résolution
d'un système linéaire :

résoudre un système linéaire de N équations
à p inconnues, c'est déterminer l'intersection
de N hyperplans de $\mathbb{R}^p$

2. Sinon $\mathbf{n} = (a, b, c)$ en est un vecteur normal.

3. En faisant varier d , on obtient des plans parallèles tous orthogonaux à $\mathbf{n}$

4. Si $d = 0$, on a un **plan vectoriel** (passant par $(0, 0, 0)$). $\Rightarrow$ ser de dim 2 car $(a, b, c) \neq 0$

■ Exemple 3.

1. $2x + y - 3z + 4 = 0$: plan normal à $\mathbf{n} = (2, 1, -3)$.

2. $2x + y - 3z + 5 = 0$: plan parallèle au précédent.

3. $x + y + z + 3 = 0$ et $x - z + 2 = 0$ sont les équations de plans orthogonaux puisque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

C) Hyperplan de $\mathbb{R}^n$

Équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + k = 0 \text{ où } (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$$

1. Si $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$, l'ensemble obtenu **n'est pas** un hyperplan ! obtient :

2. Si $k = 0$ c'est un hyperplan vectoriel (passe par $(0, \dots, 0)$).

a) Il est de dimension $n - 1$.

b) Il est orthogonal à $\mathbf{n} = (a_1, \dots, a_n)$.

3. Les hyperplans vectoriels du plan sont les droites vectorielles ($n = 2$).

4. Les hyperplans vectoriels de l'espace sont les plans vectoriels ($n = 3$).

5. Si $k \neq 0$, on a un hyperplan parallèle à celui obtenu pour $k = 0$, puisqu'il admet aussi $\mathbf{n}$ comme vecteur normal.

■ Exemple 4.

1. $x + y + z + t = 3$ est l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Il est parallèle à l'hyperplan vectoriel d'équation $x + y + z + t = 0$ puisqu'ils admettent tous deux le vecteur $\mathbf{n} = (1, 1, 1, 1)$ comme vecteur normal.

2. Dans $\mathbb{R}^{12}$, $x_8 = 0$ est un hyperplan vectoriel de vecteur normal : $\mathbf{n} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$

■ Remarque 1.

Les hyperplans, en tant que noyaux de formes linéaires non nulles, sont en effet de dimension $n - 1$ d'après le théorème du rang.

notion hors programme.

2 Produit scalaire

A) Propriétés du produit scalaire, de la norme

■ Proposition 1 [Règles de calcul]

$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2$, avec $U = \text{Mat}(\mathbf{u})$, $V = \text{Mat}(\mathbf{v})$:

♥ a*. Expression matricielle du produit scalaire : $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = U^T V = V^T U = \sum_{i=1}^n u_i v_i$
definition.

b. Positivité : $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$ (par définition $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$).

c. Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$ En particulier $\|-\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$

d. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\| -5\mathbf{u} \| = 5 \|\mathbf{u}\|$

e. Formule d'Al-Kashi : $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$ *id.*

f. Identité remarquable : $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$ *rem.*

g. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$ (symétrie)

h. $\mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$ (linéarité à droite)

i) linéarité à gauche.

Dans $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, 2, 3)$$

$$v = (-7, 1, 4)$$

Calcul du produit scalaire $(u \cdot v)$:

$$\begin{aligned} (u \cdot v) &= 1 \times (-7) + 2 \times 1 + 3 \times 4 \\ &= -7 + 2 + 12 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Version matricielle de ce calcul :

$$U^T \times V = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \square$$

↑ $1 \times (-7) + 2 \times 1 + 4 \times 3$

$$U^T \times V = (7) \stackrel{\text{abus}}{=} 7$$

↑
matrice 1×1

← réel

abus car: $M_{1,1}(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$,

mais abus largement toléré

il faut toujours être conscient de abus.

■ Remarque 2.

Il existe différentes notations du produit scalaire :

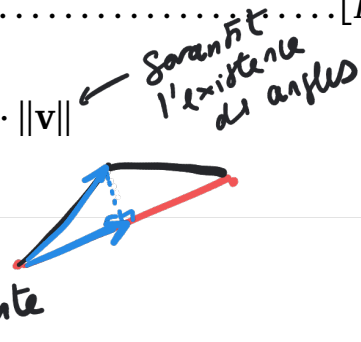
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

■ Théorème 1 [Inégalités de Cauchy-Schwarz]

$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2 :$

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$

2. Inégalité triangulaire : $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.



■ Exercice 1.

Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$

1. On suppose $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de même norme. Que dire des vecteurs $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$?
2. De façon générale, fabriquer deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ orthogonaux à partir de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

B) Familles orthogonales

■ Définition 2 [Vecteurs orthogonaux, colonnes orthogonales]

1. Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont dit orthogonaux si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
2. Deux colonnes U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont dites orthogonales si $U^T V = 0$.

■ Remarque 3.

Dire que deux colonnes sont orthogonales équivaut à dire que les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qu'elles représentent canoniquement le sont aussi.

■ Définition 3 [Vecteur unitaire ou normé ou normalisé]

Un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ est dit unitaire ou normalisé, ou normé si sa norme vaut 1, c'est-à-dire si : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$.

T_{15.1}

Calculs de normes

Puisque la norme d'un vecteur est un réel positif, il est toujours plus commode dans les calculs de manipuler les carrés des normes plutôt que les normes elles-mêmes (tout comme dans les nombres complexes, il est préférable de manipuler $|z|^2$ plutôt que $|z|$).

T_{15.2}

Normalisation d'un vecteur non nul 2 scalaire

Si $\mathbf{u}$ est un vecteur non nul, les vecteurs $\pm \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u}$, notés abusivement $\pm \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ sont des vecteurs unitaires ou normés.

notation abusive mais tolérée et laissent unitaire

Example illustrating def 2.

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ or } V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ are orthogonal}$$

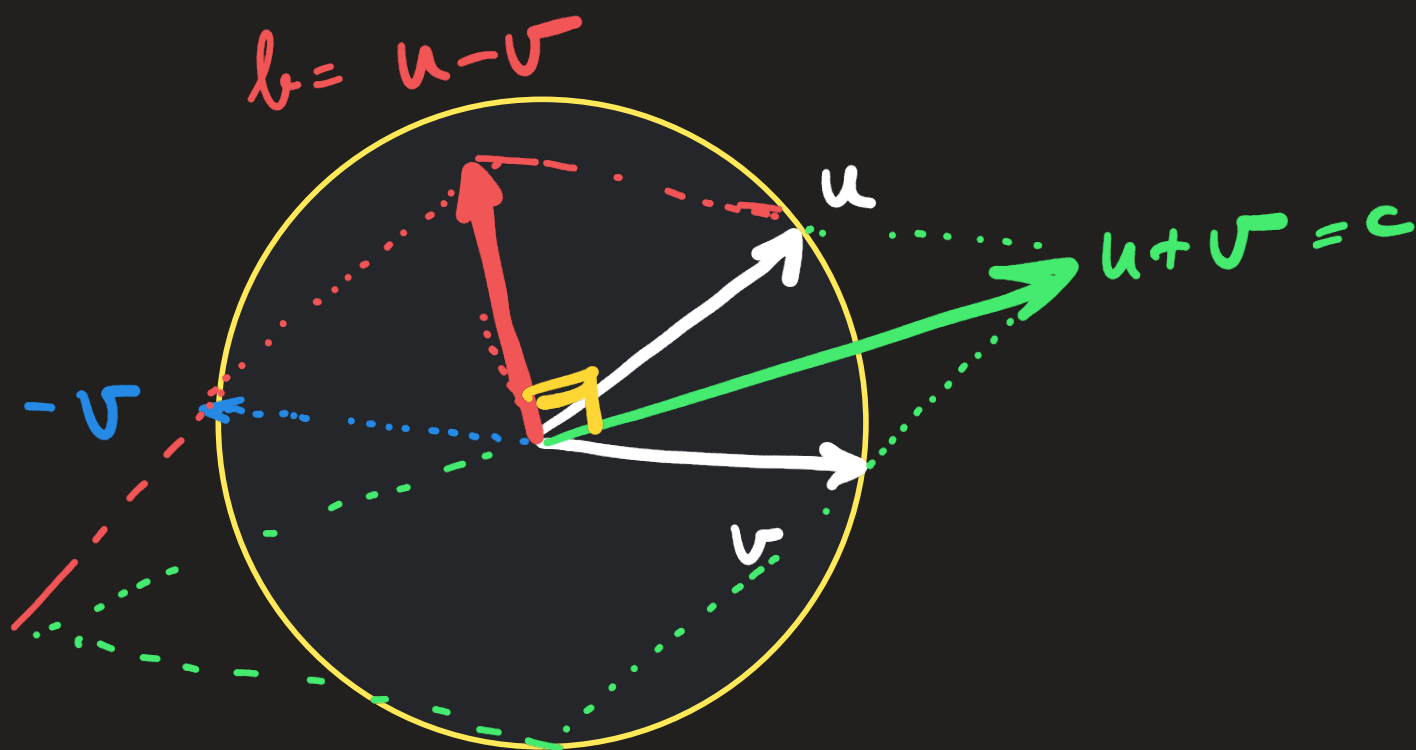
can $U^T V = -1 + 0 + 1 = 0$.

Exercice 1.

$$\|u\| = \|v\|$$

$$a = u + v$$

$$b = u - v$$



a et b ont l'air orthogonaux.

Vérif: $a \cdot b = (u + v) \cdot (u - v)$

$$= \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

$$p \perp q \Leftrightarrow p \cdot q = 0$$

Car u et v ont même norme.

(2) Cas général: si $\|u\| \neq \|v\|$.

T_{152} $a = \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}$ et $b = \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}$

sont orthogonaux d'après 1).

preuve de $|(u \cdot v)| \leq \|u\| \times \|v\|$ (S)

① Preuve qui n'aide pas à comprendre pourquoi c'est vrai.

J'introduis $f: t \mapsto \|u + tv\|^2$
 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Je simplifie: $f(t) = \|u\|^2 + \|tv\|^2 + 2(u \cdot tv)$
prop 1
e)

$$f(t) = \|u\|^2 + t^2 \|v\|^2 + 2t(u \cdot v)$$

• Si $v=0$, $\|v\|=0$ et (S) est clairement vraie
 puisque $|u \cdot v| = 0$ et $\|u\|\|v\| = 0$.

• Supposons $v \neq 0$.

- Il se verra que f est un trinôme.

- Comme $f(t) = \|u + tv\|^2$, f est positif.

- Son discriminant est donc ≤ 0 :

$$\Delta = 4(u \cdot v)^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

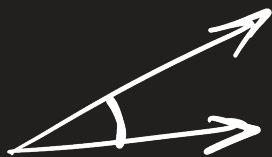
d'où $(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$

en passant aux $\sqrt{\quad}$:

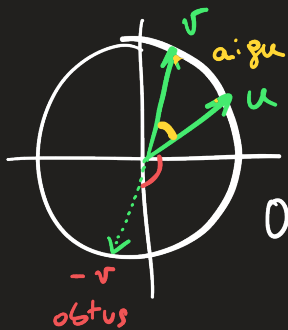
$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| \text{ car } \|u\|, \|v\| \geq 0.$$

② Preuve plus compréhensible.

La propriété a l'air en lien avec l'orientation de u et v .



Je suppose $\|u\| = \|v\| = 1$ et je
 montre que $|u \cdot v| \leq 1$.



Je développe:

$$0 \leq \|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \pm 2(u \cdot v)$$

mesure
l'ouverture
de l'angle

Finalement: $\pm 2(u \cdot v) \leq 2$

autrement dit: $\boxed{-1 \leq (u \cdot v) \leq 1}$

Cas général: si $\|u\| \neq 0$ et $\|v\| \neq 0$.

T_{152} $\frac{u}{\|u\|}$ et $\frac{v}{\|v\|}$ sont de norme 1.

donc $\left| \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right| \leq 1$ d'où le résultat
 en multipliant par $\|u\| \|v\|$

preuve de l'inégalité triangulaire:

À prouver: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

il se déduit par positivité de prouver que:

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \quad T_{151}$$

$$\text{Or } \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$$

$$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \text{ par Cauchy-Schwarz}$$



■ Définition 4 [Famille orthogonale de vecteurs] *orthogonale/orthonormée*
 Soit $p \geq 1$ un entier et $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est :

1. orthogonale si : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2 \quad i \neq j \Leftrightarrow \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$.
2. *orthonormée* orthonormale si $\mathcal{F}$ est orthogonale et ses éléments sont normalisés.

■ Remarque 4.

Une famille orthogonale ne peut contenir le vecteur nul d'après la définition.

■ Proposition 2 [Caractérisation matricielle]

Si $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est une famille de p vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et si $A = \text{Mat}(\mathcal{F})$ alors :

1. $\mathcal{F}$ est orthogonale $\Leftrightarrow A^T A$ est diagonale inversible (i.e. sans zéros sur la diagonale).
2. $\mathcal{F}$ est orthonormée $\Leftrightarrow A^T A = I_p$.

■ Remarque 5.

1. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ donc $A^T A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$! *Remarque : A n'est pas carrée, $A^T A$ l'est !*
2. La matrice $A^T A$ est symétrique, il suffit donc de calculer le triangle supérieur de coefficients (diagonale comprise).

3. La base canonique $\mathbf{R}^n$ est orthonormale : $I_{n \times n}^T I_n = I_n$ ■

■ Exercice 2.

Vérifier que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est orthogonale, où $\mathbf{u} = (1, 3, 1)$, et $\mathbf{v} = (-3, 2, -3)$.

■ Théorème 2 [Indépendance linéaire ***]

Les familles orthogonales de vecteurs sont des familles libres.

■ Corollaire 1

1. Les familles orthogonales de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ contiennent au plus n vecteurs.
2. Une famille orthogonale de n vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

■ Théorème 3 [Existence de bases orthonormées]

Tout sous-espace F de $\mathbf{R}^n$ non réduit à $\{\mathbf{0}\}$ admet une base orthonormale.

■ Théorème 4 [Coordonnées d'un vecteur sur une base orthogonale/orthonormée]

Si $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est une famille orthogonale. Alors :

1. (Théorème de Pythagore) : $\left\| \sum_{j=1}^p \mathbf{u}_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^p \|\mathbf{u}_j\|^2$

2. $\mathcal{F}$ est une base de $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

3. si $\mathbf{x} \in F$:

a) la coordonnée de $\mathbf{x}$ sur le vecteur $\mathbf{u}_j$ est : $\lambda_j = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_j)}{\|\mathbf{u}_j\|^2}$,

$\lambda_j = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_j)$ si $\mathcal{F}$ est orthonormée

b) Ainsi : $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^p \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_j)}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j$

c) $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^p \lambda_j^2$.

4. (invariance en base orthonormale). Si $\mathcal{F}$ est une orthonormée, Si $\mathbf{x} \in F$ et $\mathbf{y} \in F$, et on pour coordonnées respectives sur $\mathcal{F}$ les matrices X et Y , alors $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = X^T Y$

preuve du thm 2 (ce qu'on fait tout le temps en phy)

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonale.

Prenons une CL nulle de $\mathcal{F}$:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = \vec{0} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

- je projette cette relation **vectorielle** sur $\text{Vect}(u_1)$.

- on obtient toujours une relation **scalaire**

$$(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p) \cdot \vec{u}_1 = (\vec{0}) \cdot \vec{u}_1$$

Cela donne en développant :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p \cdot \vec{u}_1 = 0$$

$$\lambda_1 \|u_1\|^2 + \lambda_2 \times 0 + \dots + \lambda_p 0 \times 0 = 0$$

$$\lambda_1 \|u_1\|^2 = 0$$

Comme $u_1 \neq 0$, $\|u_1\|^2 \neq 0$ donc $\boxed{\lambda_1 = 0}$

De même en projetant sur $\text{Vect}(u_j)$ ($2 \leq j \leq p$)

$$\boxed{\lambda_j = 0 \quad \forall j \in \{2 \dots p\}}$$

Conclusion $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$: $\mathcal{F}$ est libre

Exemple (illustre prop 2)

Dans $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 0, 2)$

$$v = (-2, 0, 1)$$

(u, v) est-elle orthogonale ?

Méthode 1 : $u \cdot v = 1 \times (-2) + 0 \times 0 + 2 \times 1$
 $= -2 + 0 + 2$
 $= 0$

donc u et v sont orthogonaux

Méthode 2 : (prop 2)

Introduisons $A = \Pi_{\text{Bec}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons $A^T A$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

diagonale
et inversible

(u, v) est bien une famille orthogonale

3 Projection orthogonale

A) Orthogonal d'un sev de $\mathbb{R}^n$

■ Définition 5 [Orthogonal du sev F]

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On appelle orthogonal de F l'ensemble noté $F^\perp$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à tous les vecteurs de F :

$$F^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in F \quad u \cdot v = 0.\}$$

T_{15.3}

Vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel F

Pour montrer que $v \in F^\perp$ il suffit de prouver que v est orthogonal seulement aux vecteurs d'une famille génératrice de F et pas à tous les vecteurs de F .

■ Proposition 3 [Propriétés de $F^\perp$]

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sev.

1. $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^n$.
2. $\{0\} = (\mathbb{R}^n)^\perp$.
3. $(F^\perp)^\perp = F$.
4. **a)** Tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique en : $x = x_F + x_{F^\perp}$ où $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$.
- b)** On a en particulier $\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2$ et $x_F \cdot x_{F^\perp} = 0$.

*S. $F \cap F^\perp = \{0\}$ preuve: S. $x \in F$ et $x \in F^\perp$,
 $x \cdot x = 0$ donc $x = 0$.*

B) Définition

■ Définition 6 [Projecteur orthogonal/projection orthogonale sur un sev F]

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. On appelle projecteur orthogonal sur F l'application Π_F définie par :

$$\begin{aligned} \Pi_F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x_F \end{aligned}$$

où x_F l'unique vecteur de F défini en Prop. 3, 4. a). Ce vecteur s'appelle projection orthogonale de x sur le sev F .

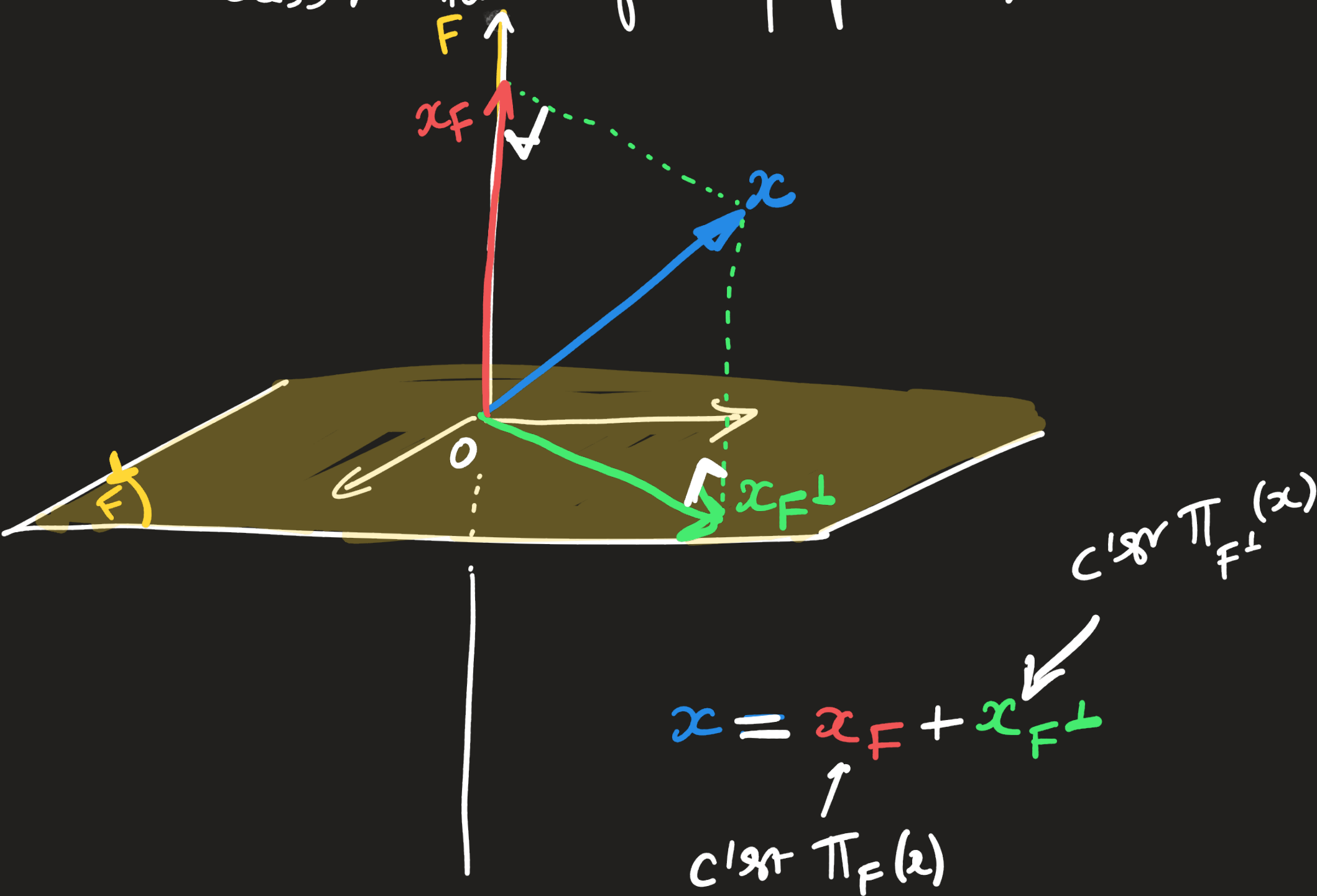
C) Propriétés

■ Proposition 4 [Lien entre Π_F et $\Pi_{F^\perp}$]

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x_{F^\perp} = x - \Pi_F(x)$
2. $\Pi_{F^\perp} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} - \Pi_F$

dessin illustratif de prop. 3 4a)



TD

12 piv

117,

118

119

120

Exemple: orthogonal d'une droite de $\mathbb{R}^n$.

Soit $w = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

et $F = \text{Vect}(w)$. Calculer $F^\perp$

$$F^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in F, u \cdot v = 0\}$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in \text{Vect}(w) u \cdot v = 0\}$$

Or $\text{Vect}(w) = \left\{ \frac{\lambda w}{u}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

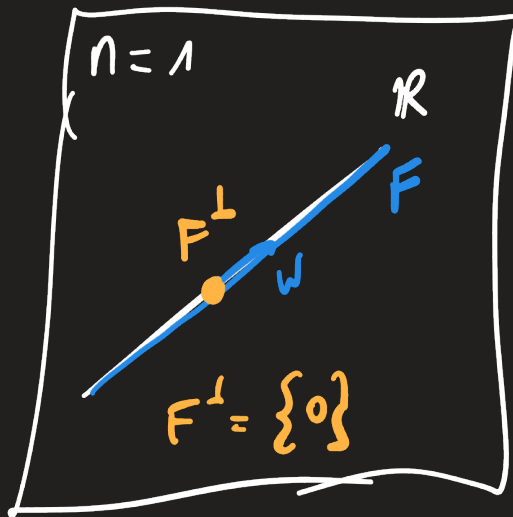
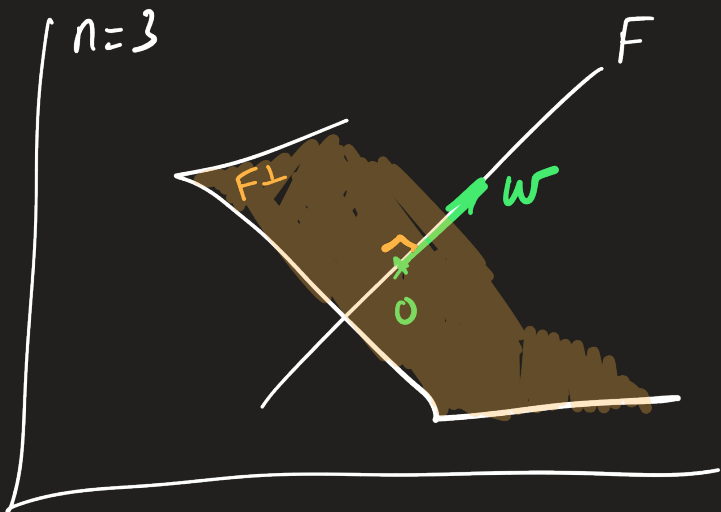
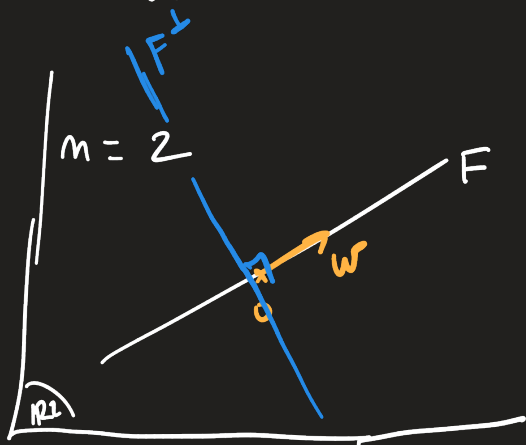
donc $F^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda w \cdot v = 0\}$

$$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid w \cdot v = 0\}$$

$$= \{v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

= Hyperplan normal/orthogonal à w .

$$\left. \begin{array}{c} - \rangle + \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \downarrow \\ \mathbb{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} - \exists v \cdot w = 0 \\ v \cdot w = 0 \end{array} \right.$$



■ **Proposition 5** [Propriétés du projecteur orthogonal sur un sev]

Le projecteur orthogonal sur F , noté Π_F :

1. est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.
2. Son image est F : $\text{Im } \Pi_F = F$.
3. Son noyau est $F^\perp$ (donc 0 est valeur propre dès que $F \neq \mathbf{R}^n$).
4. $\Pi_F \circ \Pi_F = \Pi_F$ (on dit que Π_F est idempotent).
5. $\mathbf{x} \in F \Leftrightarrow \Pi_F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. (donc 1 est valeur propre et le sev propre associé est $\text{Im } F$, ou, dit autrement $\Pi_F|_F = \text{Id}_F$).
6. Avec le théorème du rang et 3. et 5., les projecteurs orthogonaux sont donc diagonalisables et en particulier $\dim F + \dim F^\perp = n$.
7. $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^n \times F : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \Pi_F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$ (cette propriété, **hors-programme**, s'appelle auto-adjonction, mais est facile à comprendre géométriquement, et donc à prouver).

T15.4

Mmontrer qu'une application f est le projecteur orthogonal sur un sev F

On montre :

1. que f est un endomorphisme.
2. que $f \circ f = f$.
3. que son image est contenue dans F .
4. que son noyau est $F^\perp$

■ **Exemple 5.**

le st donc linéaire.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ un vecteur non nul. On considère l'application :

$$f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ \mathbf{x} \mapsto \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer son image.
2. Montrer que f est un projecteur orthogonal.

■ **Proposition 6** [Théorème de Pythagore]

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \|x\|^2 = \|\Pi_F(x)\|^2 + \|x - \Pi_F(x)\|^2$$

■ **Proposition 7** [Projecteur sur $F^\perp$]

Si Π_F est le projecteur orthogonal sur F , $\text{Id} - \Pi_F$ est le projecteur orthogonal sur $F^\perp$.

■ **Théorème 5** [Théorème spectral]

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique **réelle** (c-à-d $A^T = A$) alors :

1. A est diagonalisable.
2. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

*Si $x \in E_{\lambda_1}$ et $y \in E_{\lambda_2}$
avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$
 $x \cdot y = 0$*

Exemple 5 Ref

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \frac{(u \cdot x)}{\|u\|^2} u$$

1. À montrer : a) si $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) \in \mathbb{R}^n$ (endo)
b) f est linéaire (morphisme)

a) Si $x \in \mathbb{R}^n$, comme $\frac{(u \cdot x)}{\|u\|^2} \in \mathbb{R}$
 $f(x)$ est une C.L. de $u \in \mathbb{R}^n$
donc $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

b) linéarité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}^n$ $y \in \mathbb{R}^n$
se vérifie que : $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

Calculons : (bien trop ambigu comme notation)

$$f(x + \lambda y) = \frac{(x + \lambda y \cdot u)}{\|u\|^2} u$$

Je vas noter $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire
ici pour automatiser le calcul.

$$f(x + \lambda y) = \frac{\langle x + \lambda y, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

$$\stackrel{\substack{\text{linéarité} \\ \text{à gauche} \\ \text{de } \langle, \rangle}}{=} \frac{\langle x, u \rangle + \lambda \langle y, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

$$= \left(\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} + \lambda \frac{\langle y, u \rangle}{\|u\|^2} \right) u$$

$$= \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u + \lambda \frac{\langle y, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

$$= f(x) + \lambda f(y)$$

$f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n$

- 2) 154 1) On a vu que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ✓
2) Calculons $f \circ f$:

Pour cela, je calcule $f \circ f(x)$
pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$.

$$f \circ f(x) = f(f(x))$$

$$= f\left(\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u\right)$$

$$= \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} f(u) \text{ car } f \text{ est linéaire}$$

Reste à calculer $f(u)$:

$$f(u) = \frac{\langle u, u \rangle}{\|u\|^2} u = u$$

donc $f \circ f(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u = f(x)$

Ce calcul était
valable pour tout
 $x \in \mathbb{R}^n$: $f \circ f = f$

3. Pour répondre, je dois montrer
ce qu'est F .

Ici on remarque que si

$$x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \text{réel} \times u$$

donc $f(x) \in \text{Vect}(u)$

dit autrement :

$\text{Im } f \subset \text{Vect}(u)$

4. Calculons $\text{Ker } f$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$x \in \text{Ker } f \iff f(x) = 0 \leftarrow \text{vecteur nul de } \mathbb{R}^n$$

$$\iff \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u = 0 \leftarrow \text{vecteur nul de } \mathbb{R}^n$$

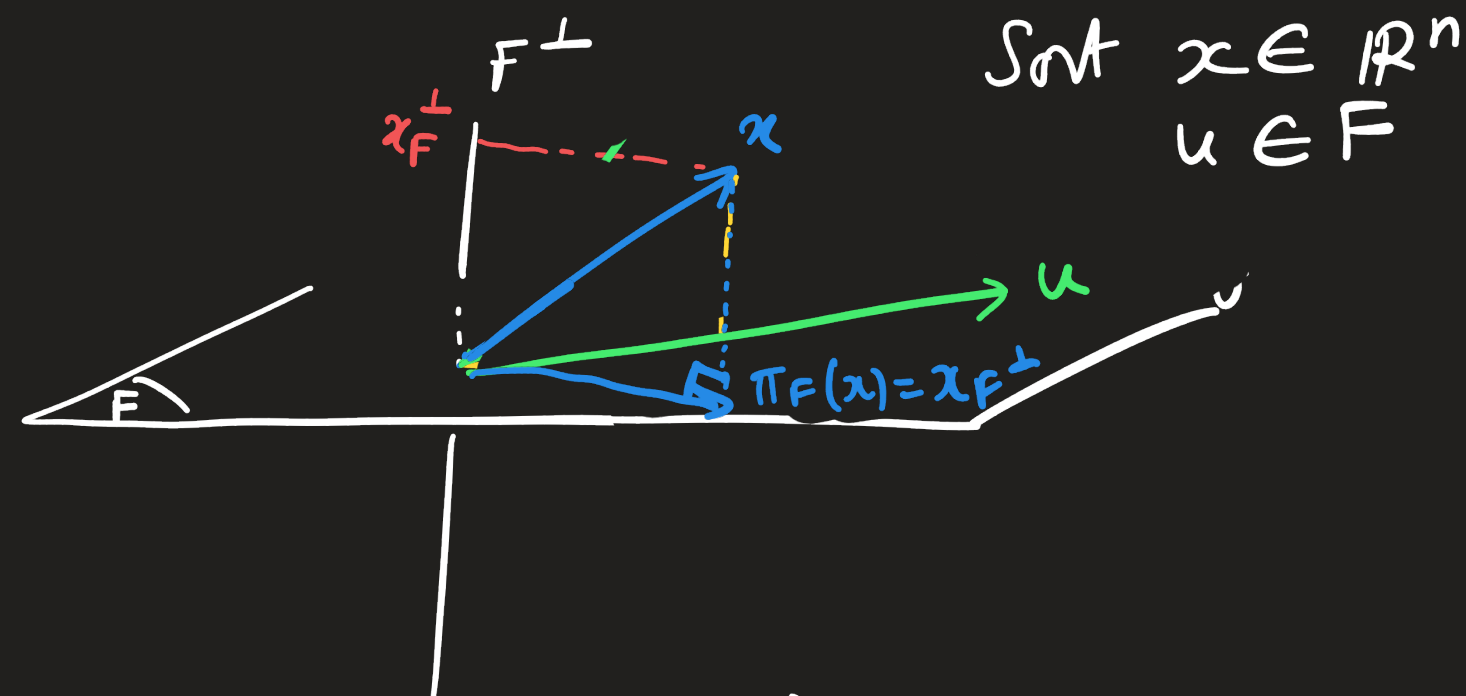
$$\iff \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} = 0 \leftarrow \text{réel}$$

$$\iff \langle x, u \rangle = 0 \leftarrow \text{réel}$$

$$\iff x \in \text{Vect}(u)^\perp$$

Conclusion : f est la projecteur orth. sur $\text{Vect}(u)$

preuve de prop 5. 70)



$$u \cdot x = u \cdot (x_F + x_F^\perp) = u \cdot (x_F + x_F^\perp) \\ = u \cdot x_F + \underbrace{u \cdot x_F^\perp}_{\text{nul}}$$

donc

$$\boxed{u \cdot x = u \cdot x_F} \\ \boxed{= u \cdot \pi_F(x)}$$

car $u \in F$
 et $x_F^\perp \in F^\perp$

à passer
 à la
 lecture

Autrement dit : le calcul de $x \cdot u$
 ne requiert que la composante
 de x le long de F , la composante
 $x_F^\perp$ est décorrélée de u .

T_{15.5}

Base orthonormée de vecteurs propres

1. Cela n'existe que pour des matrices dont les sev-propores sont deux à deux orthogonaux, par exemple pour des matrices A symétriques réelles.
2. Dans ce dernier cas, en juxtaposant des bases **orthonormées de chaque sous-espace propre**, on obtient une matrice P_* diagonalisant A . La matrice P_* vérifie donc **dans ce cas particulier** :

$$\begin{cases} P_*^{-1} &= P_*^T \\ P_*^{-1} A P_* &\text{est diagonale} \end{cases}$$
3. ⚠ Attention, même si A est symétrique, la matrice P obtenue par juxtaposition de bases de chaque sous-espace propre **ne vérifie pas** $P^{-1} = P^T$. Pour cela, **il faut s'assurer** que l'on a choisi **dans chaque sous-espace propre** des bases **orthonormées**.

4 Caractérisation de la projection orthogonale en termes de distance

A) Distance euclidienne. Distance à une partie

■ Définition 7 [distance]

1. On appelle distance entre deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ le réel noté $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ défini par :

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

2. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. On appelle distance de $\mathbf{u}$ à E le réel noté $d(\mathbf{u}, E)$ défini par :

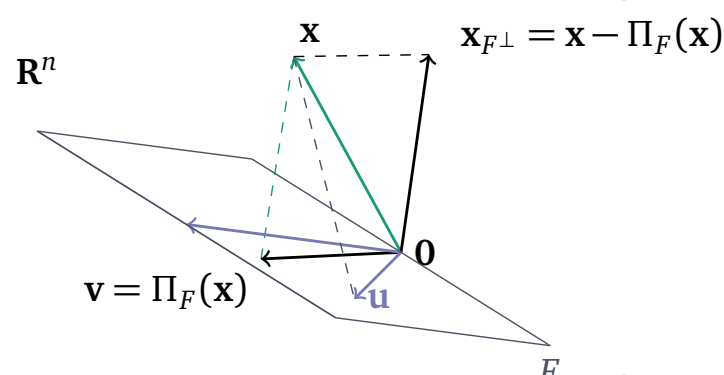
$$d(\mathbf{u}, E) = \inf_{\mathbf{v} \in E} d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

B) Caractérisation de la projection orthogonale en termes de minimum de distance

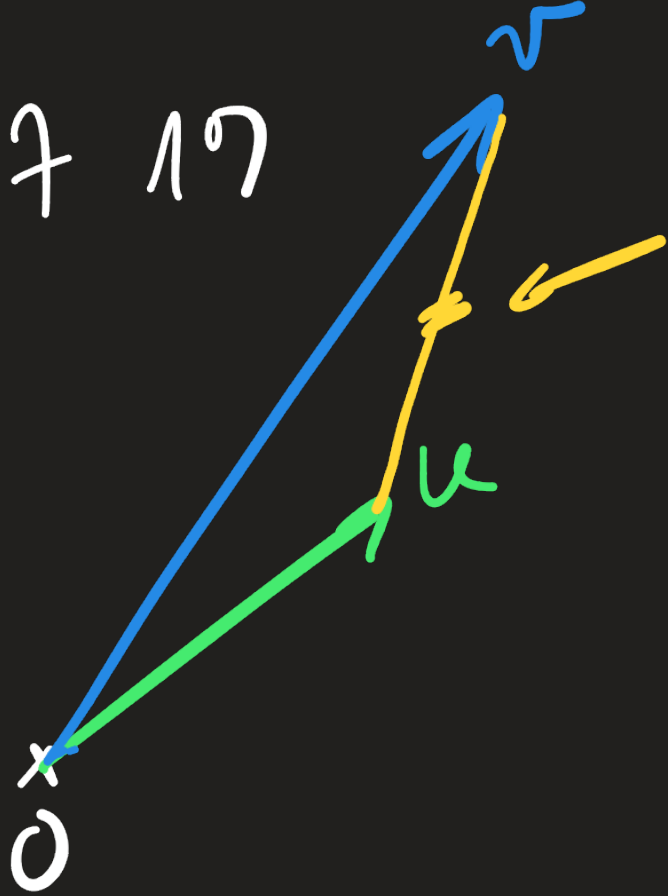
■ Théorème 6 [$\Pi_F(\mathbf{x})$ est solution d'un problème d'optimisation]

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{v} = \Pi_F(\mathbf{x})$
2. Orthogonalité : $\mathbf{v} \in F$ et $\mathbf{x} - \mathbf{v} \in F^\perp$.
3. Minimum de distance :
 $\forall \mathbf{u} \in F \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2.$

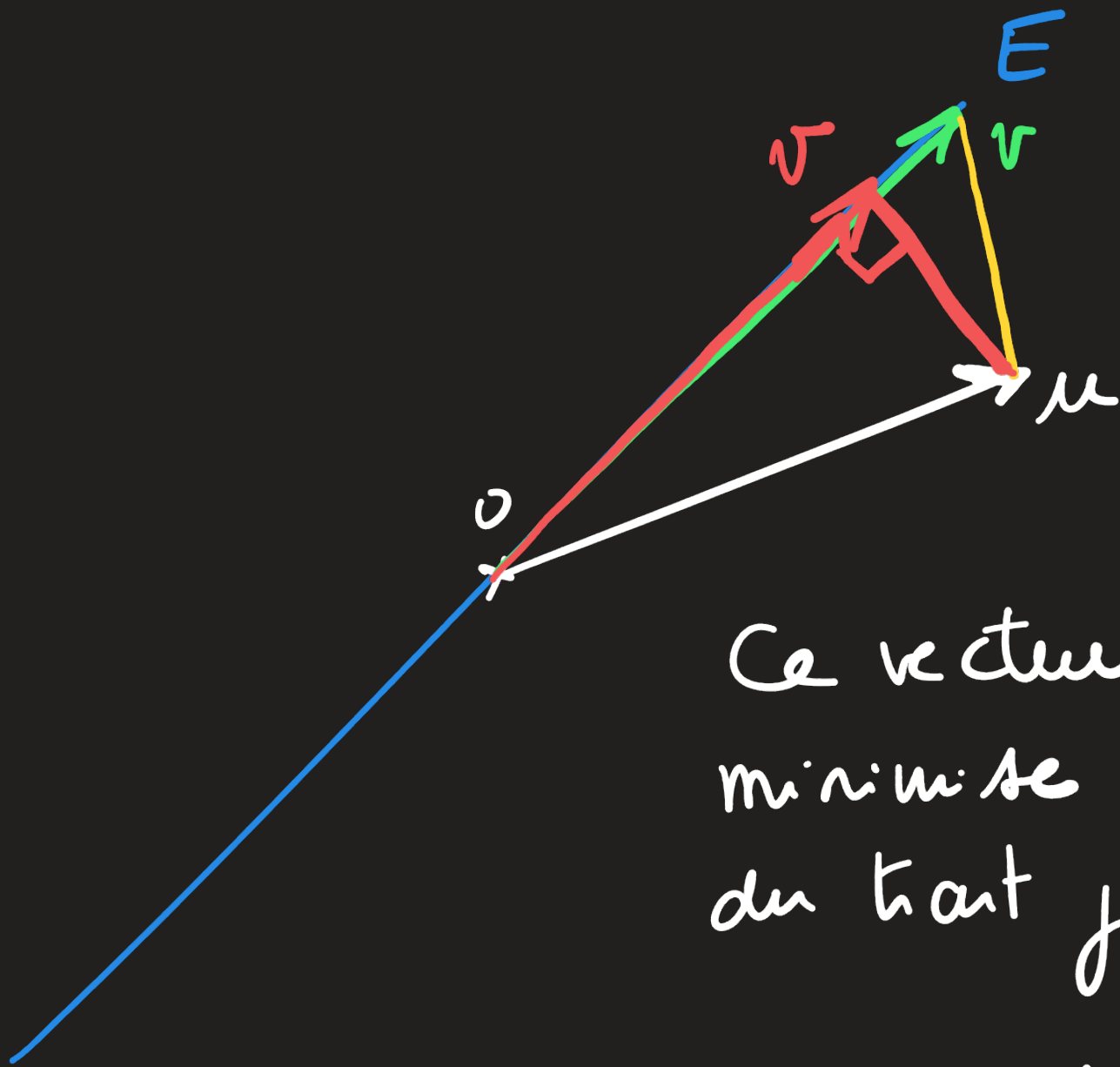


Illustrer def 7. 1°)



La longueur
de ce trait
est $\|u - v\|$

Illustrer def 7. 2°)



Ce vecteur v
minimise la longueur
du trait joignant v à u .

$$\text{on pose donc } d(u, E) = d(u, v) \\ = \inf_{w \in E} d(u, w)$$

Parmi tous les vecteurs $\mathbf{u}$ de F , le trait pointillé joignant $\mathbf{x}$ à $\mathbf{u}$ est de longueur minimale lorsque l'on prend $\mathbf{v} = \Pi_F(\mathbf{x})$: c'est lui qui réalise le minimum de distance.

5 Calculs de projections orthogonales en petite dimension

A) Dimension 1 : Projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(\mathbf{u})$

La projection orthogonale du vecteur $\mathbf{x}$ sur $\mathcal{D} = \text{Vect}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \neq 0$) est (Thm. 3) :

$$\Pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

De plus, sa matrice est donnée par : $\text{Mat}(\Pi_{\mathcal{D}}) = \frac{1}{\underbrace{U^T U}_{\|\mathbf{u}\|^2}} \times U U^T = \frac{U U^T}{U^T U}$

■ Exemple 6.

La projection orthogonale du vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sur la droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(\mathbf{u})$ où $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ est :

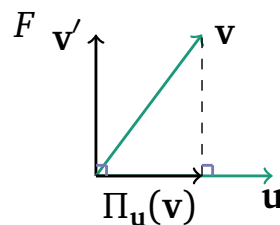
$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3}{9} \mathbf{u} \in \mathcal{D}.$$

B) Dimension 2 : Projecteur orthogonal sur le plan $F = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

1. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sont orthogonaux (donc libres, et $F = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$). La projection orthogonale du vecteur $\mathbf{x}$ sur F est :

$$\Pi_F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

2. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ne sont pas orthogonaux en notant $\Pi_{\mathbf{u}}$ le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(\mathbf{u})$, comme $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \Pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ sont orthogonaux et dans F (voir dessin), ils forment une base orthogonale de F . On est donc ramené au cas a. avec la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$.



La base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de F n'est pas orthogonale, mais la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$ où $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ l'est.

■ Exemple 7.

Soit $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 0)$. La projection orthogonale de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sur le plan $F = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est :

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3}{9} \mathbf{u} + \frac{-2x_1 + x_2}{5} \mathbf{v} \text{ puisque } \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

C) Dimension $n - 1$: Projecteur orthogonal sur un hyperplan H

Si H est un hyperplan de vecteur normal $\mathbf{n} \neq 0$, alors $\mathcal{D} = \text{Vect}(\mathbf{n})$ est une droite, et $\mathbf{x} - \Pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$ est la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ sur H (Prop. 4). Le calcul se réduit donc à celui de $\Pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$: on est ramené au cas IV 1)

■ Exemple 8.

Expression de la projection orthogonale d'un vecteur $\mathbf{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ sur le sev $F = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z - t = 0\}$. On remarque que F est de dimension 3 puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z, t) \mapsto x - y + z - t$. Cet hyperplan a pour vecteur normal $\mathbf{n} = (1, -1, 1, -1)$. La projection orthogonale de $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ sur $\mathcal{D} = \text{Vect}(\mathbf{n})$ est donc :

$$\Pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) = \frac{x - y + z - t}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} \mathbf{n}.$$

D'où la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ sur F :

$$\Pi_F(\mathbf{x}) = (x, y, z, t) - \frac{x - y + z - t}{4} (1, -1, 1, -1)$$

T15.6

Comment calculer le projeté orthogonal $\Pi_F(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x}$ sur le s-ev F ?

- 1. Si F est de dimension 1.** On fixe un vecteur $\mathbf{u}$ non nul de F (qui en est donc une base), puis c'est juste une formule :

$$\Pi_F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}.$$

- 2. Si F est de dimension 2.**

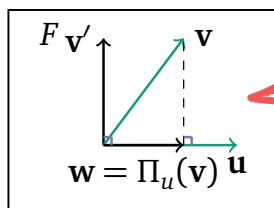
- a)** Si on dispose d'une base *orthogonale* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de F , c'est la même formule que 1. par superposition :

$$\Pi_F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

- b)** Si la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de F n'est pas orthogonale, l'idée est de se ramener à une base orthogonale pour appliquer 2.a). On déduit facilement une base orthogonale de F $(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$ à partir de $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ comme on le voit sur le dessin, on prend :

$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, et $\mathbf{w}$ est lui-même le projeté orthogonal de $\mathbf{v}$ sur la droite engendrée par $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$



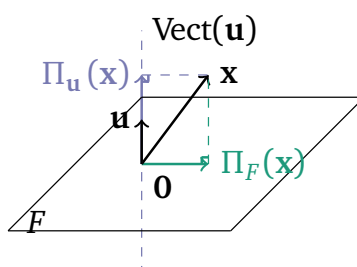
essentiel
pour comprendre

Enfin, on applique la formule du 2.a) avec $\mathbf{v}$ remplacé par $\mathbf{v}'$.

- 3. Si F est de dimension $n - 1$.** Le sous-espace orthogonal à F est dans ce cas toujours une droite, mettons $\text{Vect}(\mathbf{u})$.

On calcule projeté orthogonal $\Pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x}$ sur $\text{Vect}(\mathbf{u})$ par la formule 1., et le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur F est simplement :

$$\begin{aligned} \Pi_F(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - \Pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \end{aligned}$$



Exemple 6: projecteur orthogonal sur
un sev de $\mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u)$

$$u = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\pi_F(u) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

$$\text{On calcule : } \langle x, u \rangle = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$\|u\|^2 = 9$$

$$\pi_F(x) = \frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3}{9} u$$

Par exemple, si $x = (1, -4, 3)$

$$\pi_F(x) = -\frac{1}{9} u$$

Projecteur orthogonal sur un plan

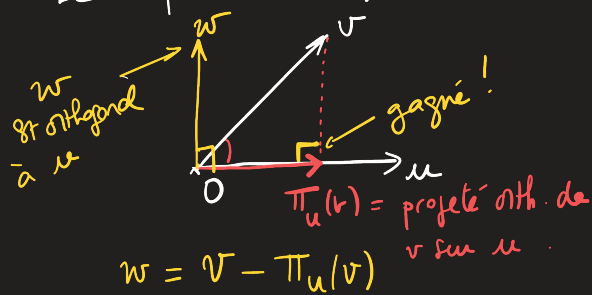
Cas où on a une base non-orthogonale
du plan.

dans $\mathbb{R}^4$ $F = \text{Vect}(u, v)$

$$u = (1, 1, 1, 1) \quad \langle u, v \rangle = 5 \neq 0$$

$$v = (1, 2, 1, 1) \quad \text{pas orthogonal.}$$

Le super desin qui aide:



• je calcule le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)$:

$$\pi_u(x) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} u$$

• je calcule $\pi_u(v) = \frac{5}{4} u$

• j'en tire $w = (1, 2, 1, 1) - \frac{5}{4}(1, 1, 1, 1)$

$$w = \frac{1}{4}(-1, 3, -1, -1)$$

• je calcule le projecteur orthogonal
sur $\text{Vect}(w)$:

$$\pi_w(x) = \frac{\frac{1}{4}(3x_2 - x_1 - x_3 - x_4)}{\frac{12}{16}} w$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(3x_2 - x_1 - x_3 - x_4)}{3} w$$

• je superpose mes deux projecteurs
pour obtenir $\pi_{\underbrace{\text{Vect}(u, v)}_F}$:

$$\pi_F(x) = \pi_u(x) + \pi_w(x)$$