

CH16 – Couples de variables aléatoires discrètes

Tombe assez peu à l'éuit

Plan du chapitre

1	Couples de VAR discrètes	4
A)	Couple	4
B)	Loi conjointe	4
C)	Lois marginales	5
D)	Lois conditionnelles	5
2	Moments	6
A)	Formule de transfert pour des variables finies	6
B)	Covariance <i>nouveau</i>	6
C)	Corrélation et dépendance	6
3	Résultats sur les sommes de VAR	7
A)	Moments	7
B)	Loi de $X + Y$ où X, Y sont à valeurs entières positives	7
C)	Stablilité des lois binomiales par somme	7
D)	Stablilité des lois de Poisson par somme	7

Liste des définitions

Déf.1	Couple de variable aléatoires discrètes	4
Déf.2	Loi ou loi conjointe du couple	4
Déf.3	Lois marginales d'un couple de var	5
Déf.4	Loi conditionnelle de X sous l'observation de $Y = y_j$	5
Déf.5	Covariance de deux var	6
Déf.6	Variables décorrélées	6

Liste des techniques de base

T161.	Comment calculer une somme double ?	3
T162.	Comment trouver la loi conjointe d'un couple (X, Y) ?	4
T163.	Quand utiliser le lemme des coalitions ?	8

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T₀** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4.

★

 Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

- Connaître les règles de calculs de sommes doubles.
- I, J : sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
- $(\Omega, \mathcal{T}, P)$: espace probabilisé fixé et X, Y deux VAR discrètes sur Ω .
- $(x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J}$ familles de nombres indexées sur I et J . Ces familles sont finies si I et J sont finis. Sinon, ils sont infinis et dénombrables.
- Dans ce qui suit $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in J\}$.

T_{16.1}
Comment calculer une somme double ?

Donnée : une somme $S = \sum_{i,j} a_{ij}$ de nombres complexes.

1. Le calcul d'une somme double consiste **toujours** en le calcul **consécutif** de deux sommes simples : on somme d'abord par rapport à un premier indice (i ou j **au choix**, rien n'est obligé), puis par rapport à l'indice restant.
2. On calculera d'abord en faisant **un choix**, puis en écrivant :

$$S = \underbrace{\sum_{i=\square}}_{\text{somme extérieure}} \left(\underbrace{\sum_{j=\square} a_{ij}}_{\text{somme intérieure}} \right) \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum_{j=\square}}_{\text{somme extérieure}} \left(\underbrace{\sum_{i=\square} a_{ij}}_{\text{somme intérieure}} \right)$$

- a) Ce **choix** est contraint en général par la **faisabilité** du calcul.
 - b) Le problème dans ce genre d'écriture est alors de **déterminer correctement les plages de valeurs de $\square$ prises par i et j** dans l'expression de S .
3. Les symboles des sommes doubles permettent sans efforts de se souvenir de ces plages pour peu que l'on respecte les deux règles de lecture suivantes de ces symboles :

Règle d'or 1. L'indice de la somme extérieure ne peut **jamais** dépendre de celui de la somme intérieure. *On fera donc varier l'indice de la somme extérieure sur toute la plage donnée, et l'autre indice ne doit pas apparaître*

Règle d'or 2. En général, l'indice intérieur dépend de l'autre. *On fera donc varier l'indice de la somme intérieure sur la plage obtenue en bornant par rapport à l'indice de la somme extérieure.*

Les notations sont assez explicites pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

4. Cas particulier le plus courant :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} = \sum_{i=\square} \sum_{j=\square} = \sum_{j=\square} \sum_{i=\square}$$

■ Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Calculer $S = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} x^j$.

2. Calculer $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

1 Couples de VAR discrètes

A) Couple

■ **Définition 1** [Couple de variable aléatoires discrètes]

Donnée de deux VAR discrètes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Le couple est noté (X, Y) (l'ordre compte).

modélise la mesure de deux grandeurs sur un même sujet.

B) Loi conjointe

■ **Définition 2** [Loi ou loi conjointe du couple]

C'est la mesure de probabilité induite par la fonction de masse π définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \pi(x_i, y_j) &= P(X = x_i \cap Y = y_j) \\ &\stackrel{\text{notation}}{=} P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

■ Remarque 1.

Il arrive de représenter la loi conjointe dans un tableau :

$x = \begin{matrix} \diagdown \\ y = \end{matrix}$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$
x_1					
x_2					
$\vdots$				$\downarrow$	
x_i			$\rightarrow$	$P(X = x_i, Y = y_j)$	
$\vdots$					

■ Exercice 2. *Seit dans tout le chapitre*

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On réalise l'expérience suivante :

- On tire une boule au hasard dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
- Si on observe $[N = i]$, on lance ensuite i fois une pièce non truquée.

On note alors T la variable aléatoire égale au nombre de piles observés lors de l'expérience. Déterminer la loi conjointe du couple (N, T) .

Exercice 2

T162. 1. D'après l'énoncé $N(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

T vaut le nb de pile obtenus : il va de 0 à 3

$$T(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

2. Tableau de la loi conjointe :

$N \backslash T =$	0	1	2	3
1	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$	0	0
2	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{4}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$	0
3	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{8}$	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}$	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{8}$

2.a) Incompatibilités éventuelles :

le nombre de pile observé ne peut excéder le nombre de lancers donc :

$$[N=i \cap T=j] = \emptyset \text{ si } j > i$$

$$P(N=i, T=j) = 0 \text{ si } j > i$$

2.b) Soit maintenant i, j t.q. $0 \leq j \leq i \leq 3$ ($i > 0$).

$$\text{Avec: } P(T=j, N=i) = P(T=j | N=i) P(N=i),$$

ceci d'après la formule des probas composées.

Comme la boule est tirée au hasard :

$$P(N=i) = \frac{1}{3} \text{ (il y a 3 boules dans l'urne)}$$

Sachant que $[N=i]$ $P(T=j | N=i)$ est

la proba d'observer j succès lors de la répétition de i fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre de succès $\frac{1}{2}$, où le succès est : "observer pile", et l'épreuve est : "lancer la pièce", on trouve :

$$P(T=j | N=i) = \binom{i}{j} \frac{1}{2^i} \text{ (propriétés du Sch. de Bernoulli)}$$

$$\text{Finalement : } P(T=j, N=i) = \frac{1}{3} \binom{i}{j} \frac{1}{2^i}$$

T_{16.2}Comment trouver la loi conjointe d'un couple (X, Y) ?

1. On commence par déterminer les univers images de X et Y .
2. **a)** On commence par mettre en évidence les incompatibilités : on détecte les valeurs (i, j) pour lesquelles $P(X = i, Y = j) = 0$, ce qui permet de placer les zéros évidents dans le tableau de la loi conjointe.
b) Pour les coeffs restants : les techniques usuelles du calcul de probas (décomposition d'événements, probas composées, etc.)
3. On peut aussi calculer les lois conditionnelles de X sous les observations de Y dans le cas où ces lois sont des lois usuelles, et terminer en calculant la loi marginale de Y (ou l'inverse si ce sont les lois conditionnelles de Y qui sautent aux yeux !)

diff 4.

C) Lois marginales

■ **Définition 3** [Lois marginales d'un couple de var]

Si (X, Y) est le couple, les lois marginales du couple sont les lois des VAR X et Y .

■ **Théorème 1** [Loi conjointe donne lois marginales]

Soit $x \in X(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE associé à Y la série de t.g. $P(X = x, Y = y_j)$ converge et :

$$P(X = x) = \sum_{j \in J} P(X = x, Y = y_j)$$

■ Remarque 2.

1. On a évidemment un résultat semblable pour l'obtention de $P(Y = y)$.
2. Ainsi les lois marginales se trouvent en marge du tableau de la loi conjointe.

D) Lois conditionnelles

■ **Définition 4** [Loi conditionnelle de X sous l'observation de $Y = y_j$]

Soit (X, Y) un couple de var discrètes. Si $y_j \in Y(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sous l'observation de l'événement $[Y = y_j]$ est la mesure de probabilité induite par la fonction de masse π définie sur $X(\Omega)$ par :

$$\forall i \in I \quad \pi(x_i) = P_{[Y=y_j]}(X = x_i).$$

■ Remarque 3.

1. Définition semblable pour la loi de Y conditionnellement à $[X = x_i]$.
2. X a donc autant de lois conditionnelles que de valeurs prises par Y .
3. La connaissance de loi marginale de X et des lois conditionnelles de Y permet de retrouver la loi conjointe
4. Il n'y a pas de notation pour les lois conditionnelles du genre ~~X sachant $Y=2 \sim \mathcal{B}(2, p)$~~

■ Exemple 1.

Cas typique : X suit une loi usuelle et les lois conditionnelles de Y sous l'observation de X sont des lois usuelles. C'est le cas si p.ex on lance un dé (Var X de loi $\mathcal{U}(6)$) et qu'ensuite on lance une pièce X fois et qu'on note Y le nombre de pile obtenus (les lois conditionnelles de Y sont des lois binomiales).

Illustration du théorème 1 sur la loi du couple (N, T) de l'exercice 2.

$N \backslash T$	0	1	2	3	loi de N
1	<u>$\frac{1}{6}$</u>	<u>$\frac{1}{6}$</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{7}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	

D'après la formule des probas totales avec le scé associé à T :

$$P(N=i) = P(N=i \cap T=0) + P(N=i \cap T=1) + P(N=i \cap T=2) + P(N=i \cap T=3).$$

D'après le tableau :

$$P(N=1) = \underline{\frac{1}{6}} + \underline{\frac{1}{6}} + \underline{0} + \underline{0}$$

etc.

D'où la loi de T de la même manière

→ les lois marginales sont aux marges du tableau de la loi conjointe.

Illustration de la def 4 sur le couple (N, T) de l'exo 2:

• La VAR N à 4 lois conditionnelles:

1. La loi de N sachant $[T=0]$
2. " " " " " $[T=1]$
3. " " " " " $[T=2]$
4. " " " " " $[T=3]$

• La VAR T à 3 lois conditionnelles.

La loi conditionnelle de T sachant $[N=i]$ est une loi binomiale $B(i, 1/2)$ car si $N=i$, T mesure le nb de succès de i répétitions d'une épreuve de Bernoulli.

T162 : 3) La loi marginale de N
+ les lois conditionnelles de T
donnent la loi conjointe

puisque : $P(T=j, N=i) = P(T=j | N=i) P(N=i)$

2 Moments

A) Formule de transfert pour des variables finies

■ Théorème 2 [De transfert]

Soit (X, Y) un couple de VAR prenant chacune un nombre fini de valeurs, mettons $X(\Omega) = \{x_1 < \dots < x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1 < \dots < y_p\}$ ($n, p \in \mathbb{N}$).

Soit u une fonction de deux variables et soit $Z = u(X, Y)$. Alors l'espérance de Z est donnée par :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p u(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n u(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

B) Covariance

■ Définition 5 [Covariance de deux var]

Pour deux variables admettant des moments d'ordre 2 :

$$\text{Cov}(X, Y) := E[(X - E(X)) \times (Y - E(Y))]$$

Son signe renseigne sur la tendance qu'ont ces variables à évoluer dans le même sens.

■ Proposition 1 [Propriétés de la covariance]

La covariance est bilinéaire, et $\text{Cov}(X, X) = V(X)$.

Partage la même propriété que le produit scalaire.

■ Théorème 3 [Formule de Koenig]

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la relation suivante a un sens et est vraie :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

■ Exemple 2.

Calculer la covariance du couple (N, T) . Interpréter.

C) Corrélation et dépendance

■ Définition 6 [Variables décorréliées]

X, Y sont décorréliées si leur covariance est nulle. Sinon, on dit qu'elles sont corrélées.

■ Proposition 2 [Espérance de variables décorréliées]

Deux variables X et Y sont décorréliées si et seulement si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

■ Proposition 3 [Lien entre indépendance et corrélation linéaire]

*$P \Rightarrow Q$
 $P \not\Rightarrow Q$*

P
 X, Y indépendantes $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$
 $\text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X, Y$ indépendantes
 $\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X, Y$ dépendantes

*indép $\Rightarrow$ décorr
corr $\Rightarrow$ dep*

■ Exemple 3.

Les variables N et T sont-elles indépendantes? *NON: elles sont corrélées*

■ Remarque 4.

Pour les variables de Bernoulli toutefois, décorrélation et indépendance mutuelle sont équivalentes.

passer en 1^{re} lecture

Exemple d'utilisation de la formule de transfert avec l'exercice 2.

- je tire une boule : N = num de la boule
- je lance la pièce T = nb de piles
 N fois
- je considère l'équation du 2^d degré

$$x^2 + Tx + N = 0$$

je note son discriminant Δ .

(ex: si j'ai tiré la boule 2 et obtenu
 1 seul pile, l'équation est $x^2 + x + 2 = 0$
 $\Delta = -7$)

Δ est une VAR. Calculer $E(\Delta)$.

D'après la formule de transfert:
 $\Delta = T^2 - 4N$

$$E(\Delta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 (j^2 - 4i) P(N=i, T=j)$$

c'est une somme de 9 termes car
 sur les 12 présents, 3 sont nuls.

	$j=0$	1	2	3
$i=1$	$(0^2 - 4) \cdot \frac{1}{6}$	$+(1^2 - 4) \cdot \frac{1}{6}$	$+ 0$	$+ 0$
$i=2$	$(0^2 - 8) \cdot \frac{1}{12}$	$+(1^2 - 8) \cdot \frac{2}{12}$	$+(2^2 - 8) \cdot \frac{1}{12}$	$+ 0$
$i=3$	$(0^2 - 12) \cdot \frac{1}{24}$	$+(1^2 - 12) \cdot \frac{3}{24}$	$+(2^2 - 12) \cdot \frac{3}{24}$	$+(3^2 - 12) \cdot \frac{1}{24}$

$$\text{Total } E(\Delta) = -\frac{4}{6} - \frac{3}{6} - \frac{8}{12} - \frac{14}{12} - \frac{8}{24} - \frac{12}{24} - \frac{33}{24} - \frac{24}{24} - \frac{3}{24}$$

$$= -\frac{16 + 12 + 16 + 28 + 8 + 12 + 33 + 24 + 3}{24}$$

$$= -\frac{152}{24} = -\frac{19}{3}$$

$$\boxed{E(\Delta) = -\frac{19}{3}}$$

Prop. 1 ; $\text{Cov}(X, Y)$ marche comme $\langle u, v \rangle$:

$\mathbb{R}^n$ avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$	Ev ds VAR avec $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ sur Ω
$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$	$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
$\langle u, u \rangle = \ u\ ^2$	$\text{Cov}(X, X) = V(X) = \sigma_X^2$
$\ u\ ^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$	$V(X) = 0 \Leftrightarrow \bar{X} = 0$ p.s./q.c
$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$	$\text{Cov}(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha \text{Cov}(X, Y) + \beta \text{Cov}(X, Z)$
$\ u + v\ ^2 = \ u\ ^2 + 2\langle u, v \rangle + \ v\ ^2$	$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$
	sont très souvent 

* Rappel : $\bar{X}$ = variable X qui a été centrée

$$\bar{X} = X - E(X).$$

$$E(\bar{X}) = 0$$

Exemple 2: Calcul de Covariance.

D'après la formule de Koenig:

$$\text{Cov}(N, T) = \underbrace{E(NT)}_{\substack{\uparrow \\ \text{se calcule par la} \\ \text{formule de transfert}}} - \underbrace{E(N)E(T)}_{\substack{\uparrow \\ \text{facile car on a} \\ \text{les lois marginales}}}$$

1) $E(N) = \frac{1+3}{2} = 2$ car $N \sim \mathcal{U}(3)$ (bidiracte)

2) $E(T)$: d'après la loi marginale de T:

$$E(T) = 0 \cdot \frac{7}{24} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{5}{24} + 3 \times \frac{1}{24} \\ = \frac{24}{24} = 1.$$

3) $E(NT)$: formule de transfert:

$$E(NT) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 i j P(N=i, T=j)$$

$$i=1 \quad \begin{matrix} j=1 \\ 1 \cdot \frac{1}{6} \end{matrix} + \begin{matrix} j=2 \\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} j=3 \\ 0 \end{matrix}$$

$$i=2 \quad + \begin{matrix} 2 \cdot \frac{2}{12} \end{matrix} + \begin{matrix} 4 \cdot \frac{1}{12} \end{matrix} + 0$$

$$i=3 \quad + \begin{matrix} 3 \cdot \frac{3}{24} \end{matrix} + \begin{matrix} 6 \cdot \frac{3}{24} \end{matrix} + \begin{matrix} 9 \cdot \frac{1}{24} \end{matrix}$$

$$E(NT) = \frac{4 + 8 + 8 + 9 + 18 + 9}{24} \\ = \frac{56}{24} = \frac{7 \times 8}{3 \times 8} = \frac{7}{3}.$$

D'où $\boxed{\text{Cov}(N, T) = \frac{7}{3} - 2 \times 1 = \frac{1}{3} > 0}$

Les variables sont positivement corrélées:
 $\text{Cov} \geq 0$ $\uparrow$ $\text{Cov} \neq 0$

Synthèse: Si N augmente, T a tendance à augmenter aussi.

3 Résultats sur les sommes de VAR

A) Moments

■ **Proposition 4** [Moments des sommes de VAR]

1. $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$

2. $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$.

3. En particulier, si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

■ Exemple 4.

Une urne contient 10 boules, dont 3 noires, les autres sont blanches. On effectue 10 tirages successifs avec remise. Soit B et N les variables aléatoires égales au nombre de boules blanches et noires tirées. Calculer la covariance de N et B .

B) Loi de $X + Y$ où X, Y sont à valeurs entières positives

■ **Théorème 4** [Loi de $X + Y$]

Soit X, Y deux var discrètes sur Ω telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Alors $Z = X + Y$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sa loi est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X = n - k, Y = k) \end{aligned}$$

T16.3

Comment calculer la loi de $Z = X + Y$

Le calcul s'apparente à celui d'une intégrale de convolution. Il faut donc être soigneux sur les bornes de la somme à calculer dans $P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = n - k, Y = k)$, en discutant à n fixé quelles sont les valeurs de k pour lesquelles $P(X = n - k, Y = k) > 0$

■ Exemple 5.

Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre p . Calculer la loi de $T_1 + T_2$.

C) Stabilité des lois binomiales par somme

■ **Théorème 5** [Somme variables binomiales indépendantes]

Soit $p \in]0, 1[$ est donné, N_1, N_2 deux entiers > 0 . Si $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(N_1, p)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(N_2, p)$ et sont **mutuellement indépendantes** alors $Z = X_1 + X_2$ suit une loi $\mathcal{B}(N_1 + N_2, p)$.

Lycée Chateaubriand, Rennes
Classe de B_2^B 2025-2026
MY Patel



Cas utile :

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

et $X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$

et les X_k mutuellement indep.

(+) $\text{Hm5} \Rightarrow \sum_{k=1}^n X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(N, p)$

donne une nouvelle manière de prouver
que VAR Z suit une loi $\mathcal{B}(N, p)$:

la décomposer comme somme de n VAR
de Bernoulli mut. indep. de n param de succès

Exemple 5 Utilise thm 4.

Comme X et Y sont discrets et à valeurs entières positives on peut utiliser th 4 pour calculer la loi de Z .

- Espace image:

$$Z(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots\}$$

en effet: X et Y prennent toutes deux au moins la valeur 1, et toute valeur entière $k \geq 2$ est observable pour $X+Y$.

- Calcul de $P(Z=n)$ pour $n \in Z(\Omega)$

Soit $n \geq 2$. On sait que (th 4):

$$\begin{aligned} P(Z=n) &= \sum_{k=0}^n P(X=k, Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n \overbrace{P(X=k) P(Y=n-k)}^{u_k} \quad \text{par indep de } X \text{ et } Y. \\ &\quad \text{erreur de débutant} = \sum_{k=0}^n p q^{k-1} p q^{(n-k)-1} \end{aligned}$$

le terme u_k sous la somme est:

- nul si $k=0$ car $P(X=0)=0$
- nul si $n-k=0$ car $P(Y=0)=0$.

$$\begin{aligned} \text{donc } P(Z=n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k) P(Y=n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p q^{k-1} \cdot p q^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Z=n) = (n-1) p^2 q^{n-2}} \quad \text{car } \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1.$$

Exemple 4: $T = B + N$ et la VAR égale
au nombre de boules tirées: $T \sim \mathcal{L}(10)$.

Ainsi: $V(T) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{or } V(T) &= V(B + N) \\ &= V(B) + V(N) + 2\text{Cov}(B, N) \end{aligned}$$

d'où
$$\text{Cov}(B, N) = - \frac{V(B) + V(N)}{2}$$

or $B \sim \mathcal{B}(10, p)$ $p = \frac{7}{10}$ $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{justifiez-le}$
 $N \sim \mathcal{B}(10, q)$ $q = 1 - p$

$$\text{Cov}(B, N) = -V(B, N)$$

$$\boxed{\text{Cov}(B, N) = -10pq = -\frac{21}{10}}$$

D) Stabilité des lois de Poisson par somme

■ **Théorème 6** [Somme de variables de Poisson indépendantes]
 Soit λ_1, λ_2 réels > 0 . Si $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et sont **mutuellement indépendantes** alors $Z = X_1 + X_2$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

■ **Remarque 5.**

Ces deux derniers théorèmes s'étendent à un nombre fini arbitraire de variables **mutuellement indépendantes** (et de même paramètre de succès pour des variables binomiales).

■ **Théorème 7** [Lemme des coalitions]

Soit $n \geq 2$ un entier et $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. Soit $r \in \{1, \dots, n\}$ et f une fonction de r variables. Alors, les variables $f(X_1, \dots, X_r), X_{r+1}, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes

T_{16.4}

Quand utiliser le lemme des coalitions ?

Cas typique : calcul de la loi d'une somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes par récurrence.

1. L'initialisation repose sur le **Thm 4.** (ou un calcul de convolution pour des variables à densité) et constitue le point le plus technique de la preuve.
2. Le lemme des coalitions intervient dans l'hérédité pour justifier la mutuelle indépendance de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ avec X_{n+1} .
3. On conclut dans l'hérédité grâce à l'initialisation qui constitue dans ce contexte un théorème général pour deux VAR : il s'applique alors pour S_n et X_{n+1}

preuve du théorème 6 À savoir faire :
 le calcul de la ln d'une somme de VAR
 mutuellement indép. tombe à l'échelle.

Hypothèse de récurrence: ($n \geq 2$)

(H_n): Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n réels > 0
 $X_1, \dots, X_n$ sont n VAR mutuellement
 indép de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_i)$.

Alors $S_n = X_1 + \dots + X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

Toujours le même schéma de preuve:
 initialisation $n=2$: convolution (théorème 4 / conv)
 hérédité: lemme des coalitions + initialisation.

Initialisation: je me donne $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ indép.
 $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$

À prouver: $S_2 = X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

• $S_2(\Omega) = ?$ $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$ et $S_2 = X_1 + X_2$
 donc $S_2(\Omega) = \mathbb{N}$.

• Calcul de $P(S_2 = n)$ pour $n \in S_2(\Omega)$.

Sont $n \in \mathbb{N}$. Comme dans l'exemple 5, avec th 4:

$$P(S_2 = n) \underset{X_1, X_2 \text{ indép}}{=} \sum_{k=0}^n P(X_1 = k) P(X_2 = n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

en effet le terme u_k sous la somme n'est
 jamais nul (contrairement à exple 5).

$$P(S_2 = n) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

Coup de
couteau invisible

$$= \frac{e^{-\mu}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$\mu = \lambda_1 + \lambda_2$

$$= \frac{e^{-\mu}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

$$P(S_2 = n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

Ce qui initialise
la récurrence:
 $S_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$

Fixons $n \geq 3$
 Hérédité: Supposons (H_{n-1}). Prouvons (H_n).

Je me donne n VAR de poisson mutuellement
 indép: $X_1, \dots, X_n$ $X_i \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$ $\lambda_i > 0$

$$S_n = \underbrace{(X_1 + \dots + X_{n-1})}_{S_{n-1}} + (X_n)$$

D'après le lemme des coalitions,
 comme la coalition $(X_1, \dots, X_{n-1})$ et (X_n)
 sont disjointes S_{n-1} et X_n sont indép.

D'après H_{n-1} : $S_{n-1} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$
 H_2 : $S_n = S_{n-1} + X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n)$

donc (H_n) est vraie.