

CH17 – Théorèmes limites - Convergence en loi

Plan du chapitre

1	Résultats fondamentaux	3
	A) Inégalité de Markov	3
	B) Inégalité de Tchebychev	3
	C) Loi faible des grands nombres	3
2	Convergence en loi d'une suite de VAR	4
3	Théorèmes limites	4
	A) Approximation poissonnienne de la loi binomiale	4
	B) Théorème central-limite	5
	C) Approximation gaussienne de la loi de Poisson	6
	D) Approximation gaussienne de la loi binomiale	6
4	Application à la démarche des tests statistiques	7

Assez anecdotique : peut faire au plus l'objet
de 2/3 questions à l'écrit.
Pas prioritaire pour les révisions.

Liste des définitions

Déf.1	Échantillon d'une loi, moyenne empirique, variance empirique	3
Déf.2	Convergence en loi d'une suite de var vers une loi	4

À savoir, et à savoir prouver :
Soit $X_1 \dots X_n$ est un échantillon, d'esp. m
de variance σ^2
 $E(M_n) = m$
 $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ ← justifie qu'en T.I.P.E
on travaille avec des petits
échantillons

Liste des techniques de base		
T171.	Approximation d'une loi discrète par une loi continue	6
T172.	Démarche pour tester l'hypothèse (H_0) (dite de conformité)	8

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

- 1. **T₀** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
- 2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
- 3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
- 4.

★

 Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

■ Définition 1 [Échantillon d'une loi, moyenne empirique, variance empirique]

- n -échantillon d'une loi : n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes et de même loi. *(définies sur le même espace probabilisé)*.
- Moyenne empirique d'un n échantillon : $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. C'est une VAR et pas un nombre !
- Variance empirique d'un n échantillon (c'est aussi une VAR) :

$$S_n^2 = \frac{(X_1 - M_n)^2 + \dots + (X_n - M_n)^2}{n}.$$

1 Résultats fondamentaux

A) Inégalité de Markov (= inégalité de dispersion)

■ Théorème 1 [Inégalité de Markov]

Si X est une variable aléatoire positive admettant un moment d'ordre 1, pour tout réel $\lambda > 0$:

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$$

■ Remarque 1.

Permet de majorer la probabilité qu'une VAR prenne de très grandes valeurs.

B) Inégalité de Tchebychev

■ Théorème 2 [Inégalité de Tchebychev]

Si X est une VAR admettant un moment d'ordre 2, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

■ Remarque 2.

Quantifie le risque que la valeur observée de VAR dévie de sa moyenne.

C) Loi faible des grands nombres

■ Théorème 3 [Loi faible des grands nombres]

Si $X_1 \dots X_n$ sont n VAR mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, admettant un moment d'ordre 2, et de variance σ^2 , alors :

1. M_n admet un moment d'ordre 2.

2. (Version quantitative)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

3. (Version qualitative) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon) = 0.$ ♥

■ Remarque 3.

Ⓣ Si les X_i sont des VAR de Bernoulli, dans 2., on peut majorer σ^2 par $1/4$.

preuve du théorème 2 :

Les deux événements suivants sont égaux :

$$\left[\overbrace{|X - E(X)| \geq \varepsilon}^A \right] = \left[\overbrace{(X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2}^B \right]$$

en effet : $\forall \alpha, \beta \text{ reels} : |\alpha| \geq |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 \geq \beta^2$

Ces deux événements ont donc même proba.

Comme la VAR $(X - E(X))^2$ est positive et admet un moment d'ordre 1 (qui est par définition $V(X)$), on peut lui appliquer th 1 avec $\lambda = \varepsilon^2 > 0$.

Cela donne :

$$P(B) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

On conclut avec $P(A) = P(B)$ ■

preuve du Théorème 3.

$$M_n = \frac{1}{n}X_1 + \dots + \frac{1}{n}X_n.$$

- ① On voit que M_n est C.L. de variables aléatoires X_i qui admettent un moment d'ordre 2.

Comme l'un des VAR admettant un moment d'ordre 2 est un er, M_n admet un moment d'ordre 2.

- ② Je peux appliquer thm 2 à M_n :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

Reste à calculer $V(M_n)$:

d'après CH16, comme les $\frac{X_k}{n}$ sont mutuellement indépendants:

$$\begin{aligned} V(M_n) &= V\left(\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n V\left(\frac{X_k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} V(X_k) \quad \text{par homogénéité de la variance} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \\ &= \frac{1}{n^2} \times [\sigma^2 + \dots + \sigma^2] \quad \text{car les } X_i \text{ ont tous la même variance.} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- ③ On fixe $\varepsilon > 0$ et on applique le Théorème de grand nombre jusqu'à $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = o(1) \quad n \rightarrow \infty \quad \blacksquare$

Ce résultat justifie l'interprétation fréquentiste de la probabilité d'un événement A:

$P(A) \simeq$ Fréquence observée de l'événement A si on répète l'expérience un grand nb de fois.

preuve: - je répète n fois l'expérience.

Je note X_i la VAR égale à 1 si A a eu lieu à la i^{e} réalisation de l'expérience, et 0 sinon.

- Les VAR $X_1, \dots, X_n$ sont un n -échantillon de loi $\mathcal{B}(P(A))$.

- La VAR me donnant la fréquence d'occurrence de A est: $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = M_n$.

On conclut avec thm 3.3):

La valeur observée de M_n vaut à peu près $E(M_n)$ si n est grand.

$$\text{Or } E(M_n) \stackrel{\text{lin. de E}}{=} \frac{1}{n} (E(X_1) + \dots + E(X_n)) = \frac{1}{n} (nP(A))$$

$$E(M_n) = P(A)$$

Ceci justifie aussi la méthode informatique de la simulation d'une proba.

n. Échantillon: mène le fait qu'on effectue une série de n mesures

Exemple: on lance n fois une pièce.
 $X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le } j^{\text{e}} \text{ lancer donne pile} \\ 0 & \text{non.} \end{cases}$

Exemple: On a n plants de pois.
 On mesure la taille du j^{e} plant: représentée par une VAR T_j .
 On peut supposer les T_j mutuellement indep. et indépendamment distribués.

→ à la base des analyses statistiques en T.I.E et dans les sciences expérimentales en j^{e}

Taille moyenne de nos n plants:

$$M_n = \frac{T_1 + \dots + T_n}{n} = \text{Moyenne empirique}$$

C'est bien une VAR, car si j'ai un autre lot de n plants, j'observe/je mesure une taille moyenne différente de la taille moyenne du premier lot.

la variance empirique quantifie l'écartement des tailles de plants autour de la moyenne observée. C'est aussi une VAR, car si je change de lot, la dispersion des tailles change aussi.

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_i - M_n)^2$$

Analyse qualitative de l'inégalité de Markov:

prenez λ grand ($\lambda \rightarrow +\infty$)

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$$

petit: il y a peu de chances que X prenne des trop grandes valeurs.

Ex: $P(X \geq 10 \cdot E(X)) \leq \frac{1}{10}$

preuve du thm 1: prenons le cas de X discrète.

puisque $E(X)$ existe:

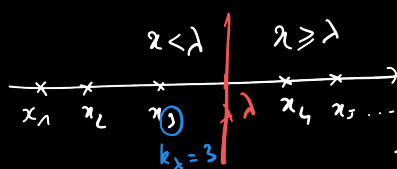
$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X=x_k)$$

où $x_1, x_2, x_3, \dots$ sont les valeurs prises par X. Rangéons-les dans l'ordre croissant, on bien que $x_1 < x_2 < \dots$

Parmi ces valeurs: certaines sont $\geq \lambda$:

$$E(X) = \underbrace{\sum_{k=1}^{k_\lambda} x_k P(X=x_k)}_A + \sum_{k=k_\lambda+1}^{+\infty} x_k P(X=x_k)$$

où k_λ est l'unique entier tel que:
 $x_{k_\lambda} < \lambda \leq x_{k_\lambda+1}$



donc $E(X) \geq \underbrace{\sum_{k=k_\lambda+1}^{+\infty} x_k P(X=x_k)}_B$ car $A \geq 0$

dans B, $x_k \geq \lambda$, donc:

$$\begin{aligned} E(X) &\geq \sum_{k=k_\lambda+1}^{+\infty} \lambda P(X=x_k) \\ &\geq \lambda \sum_{k=k_\lambda+1}^{+\infty} P(X=x_k) \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \lambda P(X \geq \lambda) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité} \end{aligned}$$

puisque: $[X \geq \lambda] = \bigcup_{k=k_\lambda+1}^{+\infty} [X=x_k]$

2 Convergence en loi d'une suite de VAR

Le but est de définir mathématiquement ce que signifie que deux lois sont à peu près égales.

■ Définition 2 [Convergence en loi d'une suite de var vers une loi]

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de fonction de répartition F_X . Soit (X_n) une suite de VAR définies sur le même espace. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de VAR converge en loi vers la VAR X si en tout point x de continuité de F_X , $F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x)$.

■ Théorème 4 [Utilisation de l'approximation]

1. Si (X_n) converge en loi vers X , alors pour tous réels a, b tels que $a \leq b$:

$$P(X_n \in [a, b]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X \in [a, b]).$$

2. En conséquence, pour n assez grand : $P(X_n \in [a, b]) \simeq P(X \in [a, b])$, ce qui veut dire que pour n assez grand^a, les lois de X et X_n sont approximativement égales.

a. le seuil étant fixé par dans les cas classiques par les théorèmes qui suivent.

En effet : comme $P(X_n \in]a, b]) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$, par définition de convergence en loi :

$$P(X_n \in]a, b]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X \in]a, b]) + o(1),$$

ce qui traduit bien que les lois sont approximativement égales, et avec un peu de technique, on arrive à établir ce résultat avec des intervalles, fermés.

■ Corollaire 1 [Cas de variables finies, où à valeurs entières]

Dans le cas particulier où X et X_n sont des VAR prenant un nombre fini de valeurs, ou plus généralement à valeurs dans $\mathbb{N}$, sont équivalents :

1. (X_n) converge en loi vers X .
2. $\forall k \in \mathbb{N} \ P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X = k)$.

En effet, dans ce cas, pour chaque entier k (où réel x_k de $X(\Omega)$), on peut trouver deux réels a_k, b_k bien choisis tels que : $P(X = k) = P(X \in]a_k, b_k])$.

■ Proposition 1 [Centrage-réduction]

1. Si (X_n) converge en loi vers X , alors (X_n^*) converge en loi vers X^* .
2. Pour tout entier $n \geq 1$: $S_n^* = M_n^*$.

⚠ S n ici est la somme $X_1 + \dots + X_n$

3 Théorèmes limites

A) Approximation poissonnienne de la loi binomiale

■ Théorème 5 [Approximation poissonnienne de la loi binomiale]

1. Soit $\lambda > 0$ et $(p_N)_{N \geq 1}$ une suite de réels de $]0, 1[$ telle que $Np_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda$. soit (X_N) une suite de variables aléatoires telles que X_N suit une loi $\mathcal{B}(N, p_N)$. Alors (X_N) converge en loi vers une variable aléatoire X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
2. Seuil d'approximation (Thm4. 2)) : dès que N est grand et p petit, de sorte que Np est de l'ordre de l'unité, on peut remplacer une loi $\mathcal{B}(N, p)$ par une loi $\mathcal{P}(Np)$.

👉 bricole
recette
empirique

Lycée Chateaubriand, Rennes
Classe de B_2^B 2025-2026
MY Patel



il arrive à l'état qu'on demande : "Montrer que (X_n) converge en loi vers X "
→ il faudra utiliser def. 2. (Agréé 2018)
exemple : TD exo. 109 q.4)
(on regarde vers quoi converge en loi la VAR Z_n)

Intérêt des
VAR centrées
réduites :
espérance 0
variance 1

preuve de 2° de prop. 1

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad (\text{rien à voir avec } S_n^2 \text{ qui est la variance empirique})$$

$$M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$E(S_n) = nm \quad \text{en supposant les } X_i \text{ mutuellement indépendantes}$$

$$V(S_n) = n\sigma^2$$

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad \text{et en notant } m = E(X_i)$$

$$= \frac{\frac{S_n}{n} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

en divisant par n haut et bas

$$= \frac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}} = M_n^* \quad \square$$

Aller voir le fichier 2/2 pour la suite !

5

■ Exemple 1.

Pour $N, p = 900, 1/365$ (On a bien N grand et Np de l'ordre de l'unité).

k	$ B(N, p)$	$ P(Np)$
0	0.085	0.085
1	0.209	0.209
2	0.258	0.258
3	0.213	0.212
4	0.131	0.131
5	0.064	0.065
6	0.026	0.027
7	0.009	0.01
8	0.003	0.003
9	0.001	0.001

B) Théorème central-limite

■ Théorème 6 [Central-limite forme 1 : variance connue]

1. Si (X_n) un n -échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$, alors la suite VAR de terme général M_n^* , appelée erreur normalisée, où

$$M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

converge en loi vers une variable $\mathcal{N}(0, 1)$. Précisément :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a < b \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_n^* \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Même conclusion pour la suite (S_n^*) .

2. Seuil d'approximation (Thm 4. 2)) : si $n \geq 30$, il est communément admis qu'une valeur approchée acceptable de $P(a \leq M_n^* \leq b)$ est la limite ci-dessus, c-à-d. $\Phi(b) - \Phi(a)$.

■ Théorème 7 [Central-limite forme 2 : variance inconnue]

Si (X_n) un n -échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et de variance inconnue, alors la loi de l'erreur normalisée empirique $M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$ converge vers une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En particulier, si $n \geq 30$, il est communément admis que la limite est une valeur approchée de $P(a \leq M_n^* \leq b)$.

■ Exemple 2.

(illustre l'intérêt de de genre de théorèmes). On lance 50 dés identiques numérotés de 1 à 50. Pour tout entier k , on note X_k la variable aléatoire égale au score du dé k .

- Donner l'expression de la variable aléatoire M donnant la moyenne M des scores observés sur les 50 lancers ?
- Appliquer le théorème central limite pour estimer $P(M \in [3, 4; 3, 6])$.
- La loi de M pourrait-elle se calculer exactement ?
- Estimer la probabilité