(À part peut-être le noyau, tous les sev propres de $f$ sont contenus dans $\operatorname{Im} f$)

# Exo 126 (Classique)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

utilise à fond l'expression matricielle du produit scalaire : $\langle u, v \rangle = U^T V$
$\|u\|^2 = U^T U$

1. $A$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

2. $A$ est visiblement de rang 1.
Son noyau est donc de dimension 2 d'après le théorème du rang. En langage spectral :

$$\boxed{0 \in \sigma(A) \quad \dim \mathcal{E}_0 = 2}.$$

Base de $\mathcal{E}_0$ : 2 vecteurs libres suffisent pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} A$.
$\text{Col } 1 - \text{col } 2 = \text{col } 1 - \text{col } 3 = 0$

donc $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{E}_0$.

Comme ils sont libres $\mathcal{E}_0 = \operatorname{Vect}((U, V))$
et $(U, V)$ est une base de $\mathcal{E}_0$.

Manque un sev propre (car ils sont de dim $\geq 1$).

À part le noyau, tout sev propre est dans $\operatorname{Im} A$.
Ici on voit que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(W)$ $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $AW = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3W$

Comme $W \neq 0$ : - 3 est valeur propre de $A$
- $\mathcal{E}_3$ contient $\operatorname{Vect}(W)$.

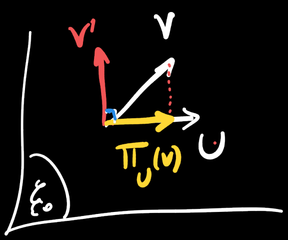
Comme la somme des dim des sev propres fait 3, $\dim \mathcal{E}_3 = 1$ obligatoirement et $\boxed{W}$ est une base de $\mathcal{E}_3$.

3. Base orthonormale de $\mathcal{E}_3$ : il suffit de normer $W$ : $W' = \frac{1}{\sqrt{3}} W$ convient puisque $W^T W = 3$.

Base orthonormale de $\mathcal{E}_0$ :

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $U^T V = 1 \neq 0$.

Ce n'est pas une base orthogonale de $\mathcal{E}_0$




$\Pi_U(V)$ = projeté orthogonal de $V$ sur $\operatorname{Vect}(U)$

$V' = V - \Pi_U(V)$ est orthogonal à $U$ et $\boxed{\text{est dans } \mathcal{E}_0.}$

Calcul de $\Pi_U(V) = \dfrac{V^T U}{U^T U} U = \dfrac{1}{2} U$

Calcul de $V' = V - \frac{1}{2} U$

$$\boxed{V' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Reste à normer $U'$ et $V'$ pour obtenir une base orthonormée de $\mathcal{E}_0$.

Posons $U' = \frac{1}{\sqrt{2}} U$ $V'' = \dfrac{1}{V'^T V'} V$

$$V'^T V' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{V'' = \sqrt{\frac{2}{3}} V' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}}$$

4. et 5. La base $(U', V'', W')$ est orthonormée.

Donc $P = (U' | V'' | W')$ diagonalise $A$

et $P^T A P = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}}_{\Delta}$ (car $P^T = P^{-1}$)

6. $B = 2A - I_3$

$P^T B P = 2 P^T A P - P^T P$
$= 2\Delta - I$

$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$ donc $B$ est diagonalisée donc diagonalisable.

Exo 127. Rem : quasiment le même a été fait en cours (on a étudié $x \mapsto \langle u,x\rangle v$ )

Corriger l'énoncé : $n \geq 2$

1 - Si $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \alpha^* v$ est colinéaire à $v$, donc il est dans $\mathbb{R}^n$ : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$^*\alpha = \langle x,u\rangle \in \mathbb{R}$ ...

Linéarité : $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f(x+\lambda y) = \langle u, x+\lambda y\rangle v$$

$$\underset{\text{linéarité à droite du p.s.}}{=} \langle u,x\rangle v + \lambda \langle u,y\rangle v$$

$$= f(x) + \lambda f(y) \quad \boxed{f \text{ linéaire}}$$

2-a) Dit dans 1 : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \in \mathrm{Vect}(v)$ — déf de $A \subset B$

c-à-d. $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}(v)$ — dim

d'où $\mathrm{rg} f \leq 1$ car $v \neq 0$.

Comme $f(u) = \|u\|^2 v \neq 0$ car $u$ et $v$ non nuls,

$\mathrm{rg}(f) \neq 0$

$\boxed{\mathrm{rg} f = 1}$

Ce qui prouve que $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(v)}$ !

2-b) D'après le théorème du rang :

$\dim \mathrm{Ker} f = n - 1$.

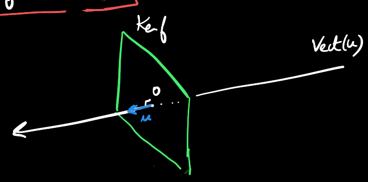
2-c) $\mathrm{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^n \ \ f(x) = 0 \}$

or $f(x) = 0 \iff \langle x,u\rangle v = 0$

$\underset{(v) \text{ libre}}{\iff} \langle x,u\rangle = 0$

$\iff x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$

$\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(u)^\perp}$




3.a. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé associé à une $\boxed{vp \neq 0}$ (*) — vp = valeur propre

fait dans le cours

$f(x)$ est colinéaire à $x$ :

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda x$, et $\lambda \neq 0$ à cause de (*)

donc $\boxed{x = \frac{1}{\lambda} f(x) = \frac{\langle u,x\rangle}{\lambda} v \in \mathrm{Im} f}$.

b) Calcul de $f \circ f$ :

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On calcule $f(f(x))$ :

$$f(f(x)) = f(\underbrace{\langle u,x\rangle}_{\text{scalaire}} v) \underset{f \text{ est linéaire}}{=} \langle u,x\rangle f(v)$$

donc $g(x) = \langle u,x\rangle \langle u,v\rangle v$

$g(x) = \langle u,v\rangle f(x)$.

Rem : (passer en 1re lecture)

Ceci prouve que l'endomorphisme $\Phi$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par : $\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $w \mapsto f \circ w$

$(\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)))$

admet $f$ comme vecteur propre pour la valeur propre $\langle u,v\rangle$

3-c) Comme $f$ n'est pas l'application linéaire nulle et que $g = \mu f$ avec $\mu = \langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$

$g = 0 \iff \mu = 0$

$\iff \langle u,v\rangle = 0$

$\iff v \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$

$\iff v \in \mathrm{Ker} f$ d'après 2c).

3-d) ⚠ Il y a une équivalence à prouver ici !

À prouver : $\underset{①}{f \text{ diago}} \iff \underset{②}{\langle u,v\rangle \neq 0}$.

On sait que $\underbrace{0 \in \sigma(f)}_{2a)}$ et $\underbrace{\dim E_0 = n-1}_{2b)}$.

Or d'après 3a) tout vecteur propre de $f$ qui n'est pas dans $E_0$ est forcément colinéaire à $v$.

Finalement : $f$ diago $\iff$ $v$ est vecteur propre pour une v.p $\neq 0$

$\iff v \notin \mathrm{Ker} f$.

$\underset{2c)}{\iff} v \notin \mathrm{Vect}(u)^\perp$

$\iff \langle v,u\rangle \neq 0$.

4. On passe en coordonnées. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ qcq

Notons $X = \mathrm{Mat}_{B_c}(x)$.

Je calcule $f(x)$ en coordonnées : $f(x) = \langle u,x\rangle v$

$AX = U^T X V$ or $U^T X$ est un scalaire

$AX = \underbrace{VU^T}_{\text{matrice carrée}} X$ (je peux le déplacer)

Comme la matrice d'une application linéaire sur une base donnée est unique : $\boxed{A = VU^T}$

5. $A^2 = V \underbrace{U^T V}_{\text{scalaire}} U^T = U^T V \, V U^T$

$= \langle u,v\rangle A$.

on retrouve bien $f \circ f = \langle u,v\rangle f$.

$$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \}$$

$A \subset B$

$\forall a \in A \quad a \in B$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x)$ col. à $v$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x)$ est C.L de $v$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) \in \operatorname{Vect}(v)$

$\iff \forall y \in \operatorname{Im} f \qquad y \in \operatorname{Vect}(v)$

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(v)$$

On conclut à l'égalité avec un argument de dimension.