Exo 131

Soit U_j la VAR égale au numéro de la boule extraite de l'urne j ($j \in \{1,2\}$) en numérotant les urnes.

$U_j \sim \mathcal{U}(n)$ par équiprobabilité des tirages.

On peut supposer U_1 et U_2 mutuellement indép.

$X = \min(U_1, U_2)$ $\quad Y = \max(U_1, U_2)$.

T_{162} 1. Espaces images :

$X(\Omega) = \{1 \dots n\}$

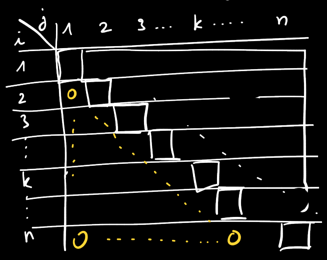
$Y(\Omega) = \{1 \dots n\}$

En effet : si on tire dans les 2 urnes la boule marquée k, X et Y prennent la valeur k, donc $k \in X(\Omega)$, $k \in Y(\Omega)$

2. Incompatibilités éventuelles :

Si $j < i$ $\quad X = i \cap Y = j$ est impossible

donc $P(X=i, Y=j) = 0$ si $j < i$



(matrice carrée $n \times n$ triangulaire sup.)

3. Calcul des coeffs restants.

Fixons $i \leq j$. On analyse :

$T_7 C_{19}$ $[X=i, Y=j] = [U_1=i, U_2=j] \cup [U_1=j, U_2=i]$

On passe aux probas :

$$P(X=i, Y=j) = P\big(\underbrace{[U_1=i, U_2=j]}_{A} \cup \underbrace{[U_1=j, U_2=i]}_{B}\big)$$

A et B sont incompatibles si $i \neq j$ (sinon $A = B$)

On distingue 2 cas :

① $i = j$ $\quad P(X=i, Y=j) = P(A \cup B)$

$= P(A)$ car $A = B$

$$\left.\begin{aligned} &= P(U_1=i) \times P(U_2=i) \text{ car } U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont indép.} \\ &= \frac{1}{n^2} \text{ car } U_j \sim \mathcal{U}(n). \end{aligned}\right\} (*)$$

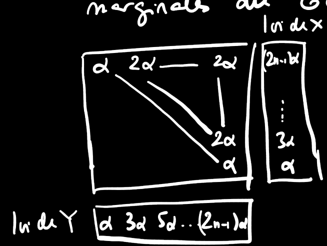
② $i \neq j$ (i.e. $i < j$) $\quad P(X=i, Y=j) = P(A) + P(B)$

$= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}$ mêmes arguments que $(*)$

$= \frac{2}{n^2}$

2. Clairement non puisqu'il y a des incompatibilités.

3. Les lois de X et Y sont les lois marginales du couple. Posons : $\alpha = 1/n^2$



Puisque X et Y sont des variables finies elles admettent une espérance : pas de Pb de convergence ici.

$$P(Y=k) = \big(1 + 2(k-1)\big)\alpha = (2k-1)\alpha$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k(2k-1)\alpha$$

$$= \alpha\left[2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right]$$

$$= \alpha\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \alpha\, n(n+1)\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \alpha\, n(n+1)\left[\frac{2n - 1/2}{3}\right]$$

$$E(Y) = \frac{n+1}{n}\,\frac{4n-1}{6}$$

$E(X)$? $\quad X + Y = U_1 + U_2$.

Par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = 2E(U_1) - E(Y)$$

$$\boxed{E(X) = n + 1 - E(Y)}$$

Exo 132 Supposer $n \geq 2$

Soit U_j la VAR égale au numéro de jeton tiré au j^e tirage.

$U_j \rightsquigarrow \mathcal{U}(n)$ puisque les tirages sont équiprobables et les U_j sont indep. puisque les tirages sont avec remise.

$$S = U_1 + U_2$$

Thm4 [On cherche la loi d'une somme de var indep. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$S(\Omega) = \{2 \ldots 2n\}$$

$$\forall k \in S(\Omega) \quad P(S=k) = \boxed{\sum_{i=1}^{k}} \underbrace{P(U_1=i)P(U_2=k-i)}_{\text{intégrande}}$$

Comme pour la convolution des VAR à densité, il faut étudier le support de l'intégrande h

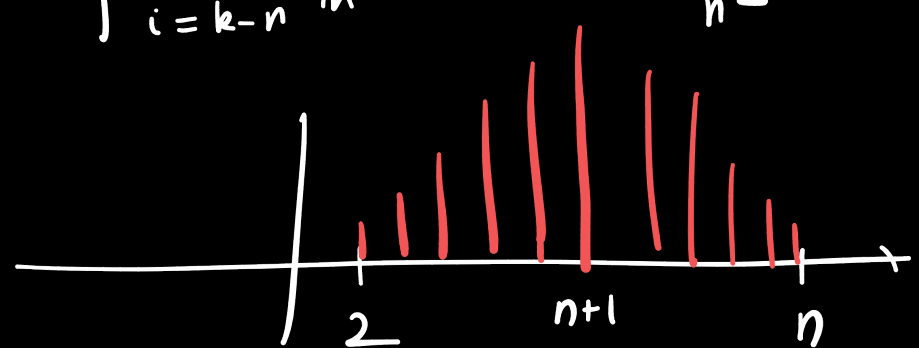
On fixe k et on regarde pour quel(s) i $h(i)>0$

$$h(i)>0 \iff P(U_1=i)>0 \quad P(U_2=k-i)>0$$
$$\iff 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq k-i \leq n$$
$$\iff 1 \leq i \leq n \quad -1 \geq i-k \geq -n$$
$$\iff 1 \leq i \leq n \quad k-1 \geq i \geq k-n$$
$$\iff 1 \leq i \leq n \quad k-n \leq i \leq k-1$$
$$\iff \boxed{\underbrace{\max(1,k-n)}_{\alpha} \leq i \leq \underbrace{\min(n,k-1)}_{\beta}}$$

$k=$	2 … $n+1$	$n+1$ … $2n$
α	1	$k-n$
β	$k-1$	n
$\alpha<\beta$?	oui	oui

Inutile ! (prévisible car $S(\Omega)$ a été prééetabli

$$P(S=k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{P(U_1=i)}_{1/n}\underbrace{P(U_2=k-i)}_{1/n} = \frac{k-1}{n^2} & (k \leq n+1) \\[2ex] \displaystyle\sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2} & (k > n+1) \end{cases}$$



Exo 133

$$P(X=k) = \frac{1}{2^{k+1}}$$

- Même chose que le 131. On calcule $P(T=i, Z=j)$

. $Z(\Omega) = X(\Omega)$ car il suffit que X et Y
$T(\Omega) = X(\Omega)$ prennent la même valeur j simultanément pour avoir obtenu $T=j$ et $Z=j$

. Incompatibilités :
Si $j>i$ $P(Z=i, T=j) = 0$ par déf.

Si $i=j$
$$P(Z=i, T=i) = P(X=i, Y=i) = P(X=i)^2 = \frac{1}{2^{2i+2}}$$

Si $j<i$ $P(Z=i, T=j) = P(X=i, Y=j) + P(X=j, Y=i)$

$$= \frac{1}{2^{i+j+1}}$$

Lois marginales : loi d'un min / max (fait CM1)

2 - Pas indép.