

Programme de colles
Semaine 20 du 16/03 au 20/03/2026

Produit scalaire dans \mathbf{R}^n

- Vecteurs de \mathbf{R}^n .
- Colinéarité.
- Déterminant de deux vecteurs dans le plan, condition de colinéarité.
- Produit scalaire usuel dans \mathbf{R}^n .
- Écriture matricielle du produit scalaire.
- Bilinearité, symétrie, positivité, définition.
- Norme euclidienne.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Inégalité triangulaire.
- Vecteurs orthogonaux.
- Toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux ne contenant pas le vecteur nul est libre.
- Théorème de Pythagore.
- Base orthonormale de \mathbf{R}^n ou d'un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n .
- Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et, pour une telle base, la matrice de passage vérifie : $P^{-1} = P^T$.
- Distance entre deux vecteurs.
- Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide de \mathbf{R}^n .
- Orthogonal F^\perp d'un sous-espace vectoriel F de \mathbf{R}^n .
- $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$
- Pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $\exists!(u_F, u_{F^\perp}) \mid u = u_F + u_{F^\perp}$
- Projection orthogonale p sur un sous-espace vectoriel F . $p : u \mapsto u_F$
- Écriture de la projection orthogonale p dans une base orthogonale ou orthonormale de F .
- Propriétés : $p \circ p = p$, $\text{Ker}(p) = F^\perp$ et $\text{Im}(p) = F$.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n .

Questions de cours :

1. Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) de \mathbf{R}^n .
2. Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs de \mathbf{R}^n .
3. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Énoncer l'inégalité triangulaire.
5. Énoncer le théorème de Pythagore dans \mathbf{R}^n .
6. Définition d'une base orthonormale de \mathbf{R}^n .
7. Expression de la projection orthogonale sur F dans une base orthonormale de F .
8. Définition de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n .
9. Lien entre distance et projection orthogonale.