Q1. Déjà fait
Q2.
Q3.

Q4. $\varphi'(t) = \underset{x'(t)}{e^t} \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}(\underset{x(t)}{e^t}, \underset{y(t)}{1-t^2}) \underset{y'(t)}{-2t} \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}}(e^t, 1-t^2)$

notations pour : dérivée partielle par rapport à la variable 1, et 2.

Q5. Il faut remarquer que $\|\mathbb{1}\|^2 = 1 + \dots + 1 = n$

$\langle x, \mathbb{1} \rangle = x_1 + \dots + x_n$

et conclure que

$$\Pi_{\mathrm{Vect}(\mathbb{1})}(x) = \frac{\langle x, \mathbb{1}\rangle}{\|\mathbb{1}\|^2} \mathbb{1} = \underset{\text{scalaire}}{\bar{x}} \cdot \underset{\text{vecteur}}{\mathbb{1}} = (\bar{x}, \dots, \bar{x}) \in \mathbb{R}^n$$

Q6 : $\overline{xy}$: moyenne des $x_i y_i$
$\bar{x}$: . . . . . x_i
$\bar{y}$: y_i

Q7 : prendre cette définition :

$$s_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Essayer d'exprimer les indicateurs statistiques en langage euclidien :

$$s_{x,y} = \frac{1}{\|\mathbb{1}\|^2} \times \langle x - \bar{x}\cdot\mathbb{1}, y - \bar{y}\cdot\mathbb{1} \rangle$$

rem : $x - \bar{x}\mathbb{1}$ = projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(\mathbb{1})^{\perp}$
(cf cours prop. 7)

Q8 : fait en classe. Appliquer les règles de calcul sur les Σ.
Autre preuve (euclidienne) : développer le produit scalaire :

Comme $\|\mathbb{1}\|^2 = n$,

$$\begin{aligned} n s_{x,y} &= \langle x - \bar{x}\mathbb{1}, y - \bar{y}\mathbb{1} \rangle \\ &= \langle x, y\rangle + \bar{x}\bar{y}\langle \mathbb{1},\mathbb{1}\rangle - \langle \bar{x}\mathbb{1}, y\rangle - \langle \bar{y}\mathbb{1}, x\rangle \\ &= n\overline{xy} + n\bar{x}\bar{y} - \bar{x}\langle \mathbb{1}, y\rangle - \bar{y}\langle \mathbb{1}, x\rangle \\ &= n\overline{xy} + \cancel{n\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}\,\cancel{n}\bar{y} - \bar{y}n\bar{x} \end{aligned}$$

$$n s_{x,y} = n\overline{xy} - n\bar{x}\bar{y} \quad \blacksquare$$

Q10. Si X est une VAR ≥ 0 sur un E.P admettant un moment d'ordre 1 alors :

$$\forall \lambda > 0 \quad P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}.$$

Q11. Si X est une VAR sur un E.P. admettant un moment d'ordre 2, alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Q12. M_n est une VAR. Par déf, elle vaut $M_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Q13. preuve l'existence : L'ens. des VAR admettant un moment d'ordre 1 est un sev. Donc $E(M_n)$ existe

ne preuve pas l'existence mais fournit le calcul : Comme E est linéaire sur cet ev :

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Comme $E(X_i) = \mu$ pour tout i, $E(M_n) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$

Q14. existence : $V(M_n)$ existe car l'ens des VAR admettant une variance (ou un moment d'ordre 2) est un ev.

Calcul : Par règles de calcul sur la variance :

$$\begin{aligned} V(M_n) &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) \quad \leftarrow \text{homogénéité de } V \\ &= \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)\Big) \\ &= \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 0\Big) \text{ car } X_i \text{ indep et indep} \Rightarrow \text{décor.} \\ &= \frac{1}{n^2}(n \times \sigma^2) \text{ Comme pour } E \\ &= \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Q15. Variable d'espérance 0, de variance 1.

Q16. $M_n^* = \dfrac{M_n - E(M_n)}{\sigma(M_n)} = \dfrac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ avec les notations de Q12.

Q17. $P\left(a \leq \dfrac{X_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq b\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} P(a \leq Z^* \leq b)$

où Z^* est une VAR $\mathcal{N}(0,1)$ d'après le théorème de Moivre-Laplace, donc

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

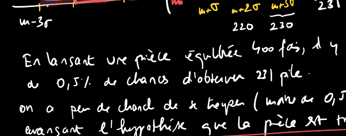
Q18. Soit Y_k la VAR de Bernoulli qui vaut 1 si le k^e lancer donne pile.
Les (Y_k) sont un n-échantillon de la loi $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1,p)$ (car les lancers sont mutuellement indep), p étant la proba de faire pile.
Comme $X = Y_1 + \dots + Y_n$ $(n = 400)$
par stabilité par somme des lois binomiales

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$$

Q19. $n = 400 \geq 30$ ✓
$np \geq 5$
$nq \geq 5$ on ne sait pas mais on le suppose ici $q = 1-p$.
D'après Moivre-Laplace la loi de X est approximativement une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = E(X) = np$
$\sigma^2 = V(X) = npq$.

Q20. Raisonnement statistique.
Si la pièce n'est pas truquée, $p = 1/2$.
Dans ce cas, les hypothèses de Q19 sont valides.
Donc la loi de X est approximativement celle-ci :

$m = np = 200$
$\sigma = \sqrt{100} = 10$



En lançant une pièce équilibrée 400 fois, il y a moins de 0,5% de chances d'obtenir 231 pile.
on a peu de chance de se tromper (moins de 0,5%) en avançant l'hypothèse que la pièce est truquée :

$\boxed{\text{on est certain à 99,5\% que la pièce est truquée}}$

Q21. Même argument qu'en Q18 :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(2N, \frac{1}{2N}\right)$$

Q22. $\underbrace{2N}_{n} \gg 1$ ✓ $\underbrace{\frac{1}{2N}}_{p} \ll 1$ ✓ $np = 1$ de l'ordre de l'unité ✓
→ L'approximation Poissonienne de la loi binomiale est valide. Paramètre $\lambda = np = 1$
variance : $\lambda = 1$.

Q23. D'après Q22 $P(X = k) \simeq P(T = k)$ où $T \rightsquigarrow \mathcal{P}(1)$

donc $P(X = k) \simeq e^{-1} \times \dfrac{1}{k!}$