Q1. Fait en cours. La dém. était attendue dans le sujet de l'Agro.
Ne pas oublier de citer le théorème 4

Q2. Idem. Ne pas oublier d'utiliser dans la récurrence le lemme des coalitions

Q3. Vu en Feuille PREPA CONC 1. $X \rightarrow \mathcal{B}(2N, \frac{1}{2N})$

Q4. J'introduis l'épreuve de Bernoulli suivante :
(E) "un gène fils choisit son père. On regarde si il a choisi i ou j".

Comme [choisir i] (A) et [choisir j] (B) sont incompatibles, la probabilité de succès est $p = P(A) + P(B) = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}$

Comme $Z_{i,j}$ compte le nombre de succès lors de $2N$ répétitions mutuellement indépendantes de (E),

$$Z_{i,j} \rightarrow \mathcal{B}(2N, p).$$

$$V(Z_{i,j}) = 2N \cdot \frac{1}{N} \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 2\frac{N-1}{N} = 2 - \frac{2}{N}$$

Q4bis) Déduire la covariance $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$. $V(X_i) =$

$$\underbrace{V(X_i + X_j)}_{V(Z_{i,j})} = \underbrace{V(X_i)}_{\frac{1}{2N}} + \underbrace{V(X_j)}_{\frac{1}{2N}} + 2\,\mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

car $X_i \rightarrow \mathcal{B}(2N, \frac{1}{2N})$ (Q3)
X_j aussi.

D'où $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \underbrace{\frac{V(Z_{i,j})}{2}} - \underbrace{V(X_i)} = \underbrace{1 - \frac{1}{N}} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2N}\right)}$

$= -\frac{1}{2N} < 0.$

- X_i et X_j sont dépendants car corrélés (négativement).
- Normal : plus un gène est choisi, moins l'autre l'est.

Q5. Déf de l'inverse :

$M_n(\mathbb{K}) \ni A$ est inversible $\iff \exists A'$ carrée tq. $AA' = A'A = I_n$.
(et une des deux suffit)

Ici $MM^{-1} = I_n$

donc $(MM^{-1})^T = I_n$

Or $(MM^{-1})^T = (M^{-1})^T M^T$

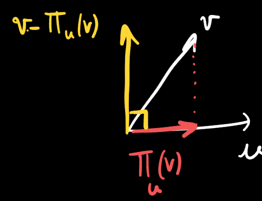
donc $\underbrace{(M^{-1})^T}_{A'} M^T = I_n$ ← on a trouvé A' carrée tq. $A'M^T = I_n$

donc M^T est inversible et son inverse est A':

$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$$

Q6. $\langle u,v\rangle = 1-2+3-4 = -2 \neq 0$: ils ne sont pas orthogonaux.
Ils sont libres car non colinéaires.

Q7. Dessin classique :



$v' = v - \Pi_u(v)$ est dans F et orthogonal à u. Donc (u,v') est une base orthogonale de F.

Calcul de v' :

$$\Pi_u(v) = \frac{u\cdot v}{\|u\|^2}u = \frac{-2}{\|u\|^2}u = -\frac{1}{15}u$$

car $\|u\|^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30$

donc $v' = v - \frac{1}{15}u$ convient

Q7bis le projecteur orthogonal sur F est :

$$\begin{array}{l} x \longmapsto \Pi_F(x) = \frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u + \frac{\langle x,v'\rangle}{\|v'\|^2}v' \\ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \end{array}$$ car $u \perp v'$.

Q8. Le projecteur orthogonal sur $\underbrace{Vect(v)}_{\mathcal{D}}$ est : $w \longmapsto \Pi_{\mathcal{D}}(x) = \frac{\langle w,v\rangle}{\|v\|^2}v$, $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

Si on note $\begin{cases}(x,y,z,t) = x \in \mathbb{R}^4 \\ \|v\|^2 = 4\end{cases}$ $\Pi_{\mathcal{D}}(x,y,z,t) = \frac{x-y+z-t}{4}\times v$

Q9. Comme pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^4$ et tout sev F de $\mathbb{R}^4$

$$x = \Pi_F(x) + \Pi_{F^\perp}(x),$$

donc $\Pi_{F^\perp}(x) = x - \Pi_F(x)$

Autrement dit, le projecteur orthogonal sur $Vect(v)^\perp$ est :

$$\Pi_{Vect(v)^\perp}(x,y,z,t) = (x,y,z,t) - \Pi_{\mathcal{D}}(x,y,z,t).$$

Q10. On utilise l'expression matricielle du produit scalaire

$$\|AX\|^2 = (AX)^T AX \underset{\text{propriétés de la transposition}}{=} X^TA^TAX$$

Q11. On raisonne par double inclusion.

① Je montre $\ker A \subset \ker A^TA$.

Si $X \in \ker A$, $AX = 0$

donc $\times A^T$ ($A^TAX = A^T0$

donc $A^TAX = 0$: $X \in \ker A^TA$

Ceci prouve que $\boxed{\ker A \subset \ker A^TA.}$

② Je montre $\ker A^TA \subset \ker A$

Si $X \in \ker A^TA$: $A^TAX = 0$

donc $X^T\times$ ($X^TA^TAX = X^T0$

donc $\|AX\|^2 = 0$ (Q 10)

donc $AX = 0$.

$\boxed{\ker A^TA \subset \ker A}$