Q1. $a=(1,1,1)$ $b=(1,-1,0)$

Comme a et b sont orthogonaux (il suffit de calculer $\langle a,b\rangle$)

Le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(a,b)$ est l'endomorphisme :

$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\longmapsto \frac{\langle a,u\rangle}{\|a\|^2} a + \frac{\langle b,u\rangle}{\|b\|^2} b$$

En notant $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\pi(u) = \pi\big((x,y,z)\big) = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1,0) \quad (*)$$

Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\pi)$. Ici $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$

où $e_1=(1,0,0)$

$e_2=(0,1,0)$

$e_3=(0,0,1)$

Par définition :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \pi(e_1) & \pi(e_2) & \pi(e_3) \end{array} \\ A = & \left(\begin{array}{ccc} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{array} \right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

On calcule avec $(*)$:

$$\pi(e_1) = \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right)$$

$$\pi(e_2) = \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{6}\right)$$

$$\pi(e_3) = \frac{1}{3}(1,1,1) + 0\,(1,-1,0) = \left(\frac{2}{6}\ \frac{2}{6}\ \frac{2}{6}\right)$$

d'où $$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ce sont les ev du contexte

Q2 $f : E \to E$ donc vecteur = élém de E

= c.l. de e_1 et e_2

(ici, on ne connait pas la nature de e_1, e_2)

$rg(A) = 1$ donc (th rg) : dim Ker $A = 1$, donc :

un vecteur non nul de Ker A en constitue une base.

Or col1 − col2 = 0 donc $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$

$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

Revenant en vecteurs : $\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((e_1 - e_2))}$

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\text{col}1, \text{col}2) = \mathrm{Vect}(\text{col}1)$

Revenant en vecteurs : $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((e_1 + e_2))}$

Ce sont les ev du contexte

Q3. $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

donc vecteur = polynôme de degré ≤ 2

Revenant en vecteurs : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big((1 + X - X^2) \big)$

Q4. $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

donc vecteur = matrice $\begin{array}{cc} \left(\quad\right) & 3 \\ 1 & \end{array}$

donc $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} f$

vraiment égal (comme toujours en maths quand on écrit =).

Q5 $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

donc vecteur = matrice 2×2

Base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: (E_1, E_2, E_3, E_4)

avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d'après le <u>cours</u>).

Revenant en vecteurs :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(E_1 + E_2 - E_3,\ E_1 + E_4 \right)$$

$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Q6 : $f : E \to E$

donc vecteur = CL de f_1 et f_2 car $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$

Mêmes arguments que Q2. pour dimension et base de Ker A. On trouve :

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

revenant en vecteurs :

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\left(f_1 - f_2\right)$$

et $f_1 + f_2 : x \mapsto xe^{x} - xe^{2x}$

Pour Im f : Im A est engendré par les colonnes de A

$$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) \quad \text{(redondances inutiles dans les familles génératrices)}$$

$$= \mathrm{Ker}\, A$$

d'où $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$.

<u>rem</u> : cela implique que $f \circ f = 0$.

Q7. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

ev du contexte

Par def : $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}^3$ $\quad$ $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$

donc : vecteur du noyau = 3-liste de réels

de l'image : 2-liste de réels

$rg(A) = 2$ car A est echelonée.

Ainsi $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. Donc tout vecteur non nul de $\operatorname{Ker} A$ en constitue une base.

on voit que dans A, $col2 - col3 = 0$

donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\operatorname{Ker} A$.

revenant en vecteurs : $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((0,1,-1))}$

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(\text{colonnes de } A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

revenant en vecteurs

donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,0), (1,1))$.

rem : $rg f = \dim \mathbb{R}^2$ donc f est surjective donc

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ (réponse convenable aussi)

Q8. Même matrice de Q7

$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$

le travail matriciel est donc le même.
c'est la reconversion en vecteurs qui change

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(\left(X - X^2\right)\right)$

$\operatorname{Im} f = \underbrace{\mathbb{R}_1[X]}_{\text{par surjectivité}} = \operatorname{Vect}\left(\left(1, 1+X\right)\right)$

Q9 $\quad f : E \to F$

donc $\mathrm{Ker} f$: contient des C.L. de e_1, e_2, e_3

$\mathrm{Im} f$: CL $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Comme $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\dim \mathrm{Ker} A = 1$ donc un vecteur non nul de A en constitue une base.

Comme $\mathrm{Col}\,1 + \mathrm{col}\,2 = \mathrm{col}\,3$, (*) $\mathrm{col}\,1 + \mathrm{col}\,2 - \mathrm{col}\,3 = 0$,

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de Ker A.

Revenant en vecteurs : $\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left((e_1 + e_2 - e_3) \right)}$

Im A est de dim 2, on peut se passer de col 3 car il est C.L. de col 1 et col 2 d'après (*)

donc $\mathrm{Im} A = \mathrm{Vect}(\mathrm{col}\,1, \mathrm{col}\,2, \mathrm{col}\,3)$

$= \mathrm{Vect}(\mathrm{col}, \mathrm{col}\,2)$

Comme $(\mathrm{col}\,1, \mathrm{col}\,2)$ est génératrice de A et que $\dim \mathrm{Im} A = 2$, c'est une base de Im A.

Revenant en vecteurs : $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right)}$

ici : vecteur = fonction C^∞

Q10. $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ y \longmapsto y'' + 2y' \end{array}$

① Endo : si $y \in C^\infty$, $y'' + 2y' \in C^\infty$ car C^∞ est un espace vectoriel.

② Linéaire : On considère $y_1 \in E$, $y_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on vérifie que $\varphi(y_1 + \lambda y_2) = \varphi(y_1) + \lambda \varphi(y_2)$

Calcul : $\varphi(y_1 + \lambda y_2) = (y_1 + \lambda y_2)'' + 2(y_1 + \lambda y_2)'$

linéarité de la dérivation

$= y_1'' + \lambda y_2'' + 2y_1' + 2\lambda y_2'$

$= (y_1'' + 2y_1') + \lambda(y_2'' + 2y_2')$

$= \varphi(y_1) + \lambda \varphi(y_2)$ ■

Q 11. $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ ← ici vecteur = poly de degré ≤ 3

① Φ linéaire : on considère deux polynômes P, Q de $\mathbb{R}_3[X]$ et un scalaire λ, on calcule :

$$\Phi(P+\lambda Q) = (X^2-1)(P+\lambda Q)'' + X(P+\lambda Q)'$$

$$\underset{\text{linéarité de } \frac{d}{dx}}{=} (X^2-1)(P''+\lambda Q'') + X(P'+\lambda Q')$$

$$\underset{\text{distributivité}}{=} (X^2-1)P'' + \lambda(X^2-1)Q'' + XP' + \lambda XQ'$$

$$= (X^2-1)P'' + XP' + \lambda\left((X^2-1)Q'' + XQ'\right)$$

$$= \Phi(P) + \lambda\,\Phi(Q)$$

② Endo. D'après les propriétés sur le degré :

si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\deg P \leq 3$ donc $\deg P'' \leq 1$

donc $\underline{\deg (X^2-1)P'' \leq 1+2}$

et $\deg P' \leq 2$, $\deg XP' \leq 2+1 = 3$

par somme, $\deg(\Phi(P)) \leq 3$ donc :

$$P \in \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow \Phi(P) \in \mathbb{R}_3[X].$$

Matrice de Φ.

On calcule $\Phi(\mathbb{1}) = (X^2-1)\mathbb{1}'' + X\mathbb{1}'$
$= 0 + 0$

$\Phi(X) = (X^2-1)\,0 + X = X$

$\Phi(X^2) = (X^2-1)\times 2 + X\cdot 2X$
$= 4X^2 - 2$

$\Phi(X^3) = (X^2-1)\,6X + X\cdot 3X^2$
$= 9X^3 - 6X$

D'où $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_3} \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Q12. On calcule $\det M_a = 1+a^2 \geq 1 > 0$

donc $\det M_a \neq 0$, donc M_a est inversible

⚠ Le déterminant n'est défini que pour des matrices 2×2.

D'après le cours : $M_a^{-1} = \dfrac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

Q13 : $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ev du contexte donc vecteur = matrice 2×2.

Avec les notations de Q5, on obtient $\mathrm{Mat}\,\phi = A$ en remplissant le tableau :

$$A = \begin{array}{c|c} & \phi(E_1) \quad \phi(E_2) \quad \phi(E_3) \quad \phi(E_4) \\ \hline & \left(\begin{matrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}$$

On calcule :

$$\phi(E_1) = 0$$

$$\phi(E_2) = 0$$

$$\phi(E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q14. On calcule Ker A.

$rg(A) = 2$ donc $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ (thm du rg)

donc 2 vecteurs libres de Ker A en constituent une base.

col 1 = col 2 donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$

revenant aux vecteurs :

$$\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Vect}(E_1, E_2)$$