Q1 Non.

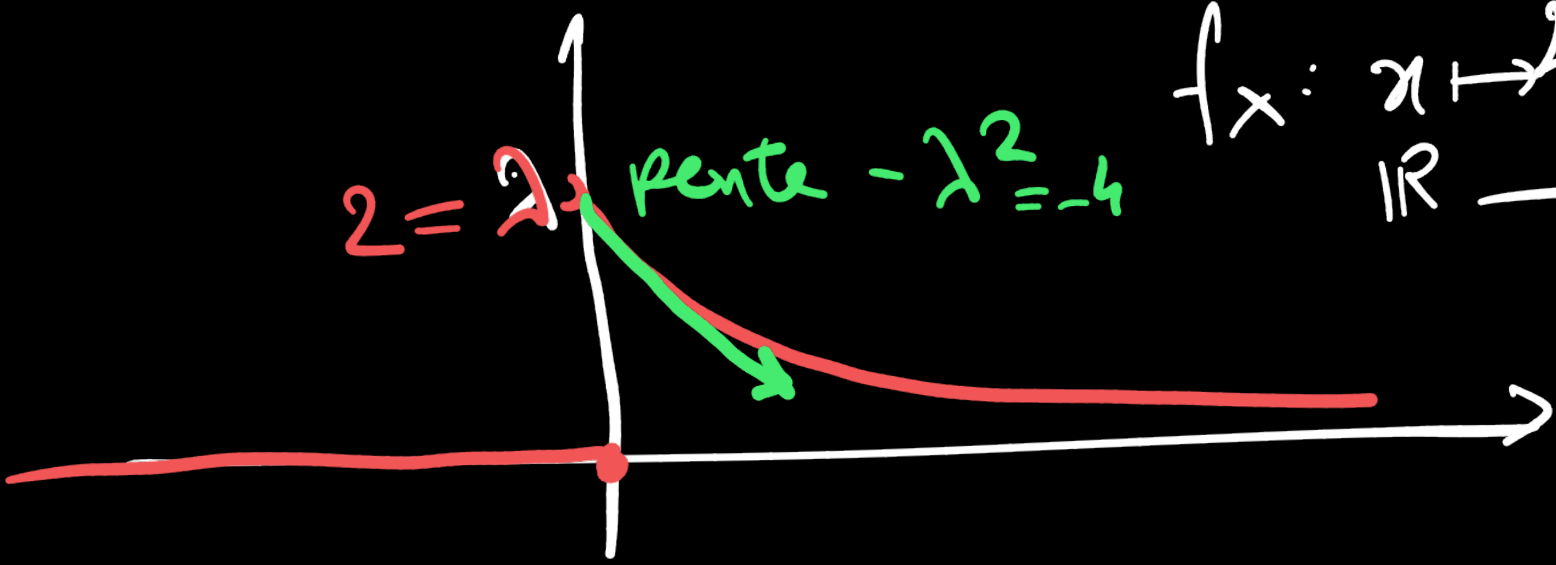
Q2. Seule une analyse de la fonction de répartition de X^2 permet de déterminer la nature de sa loi (i.e : discrète ou à densité)

Q3. D'après le cours, si F_{X^2} est

- $C^0(\mathbb{R})$
- $C^1(\mathbb{R})$ sauf peut-être en un nombre fini de points

alors, on peut affirmer que X^2 est à densité (rem : la réciproque est vraie).

Q4.

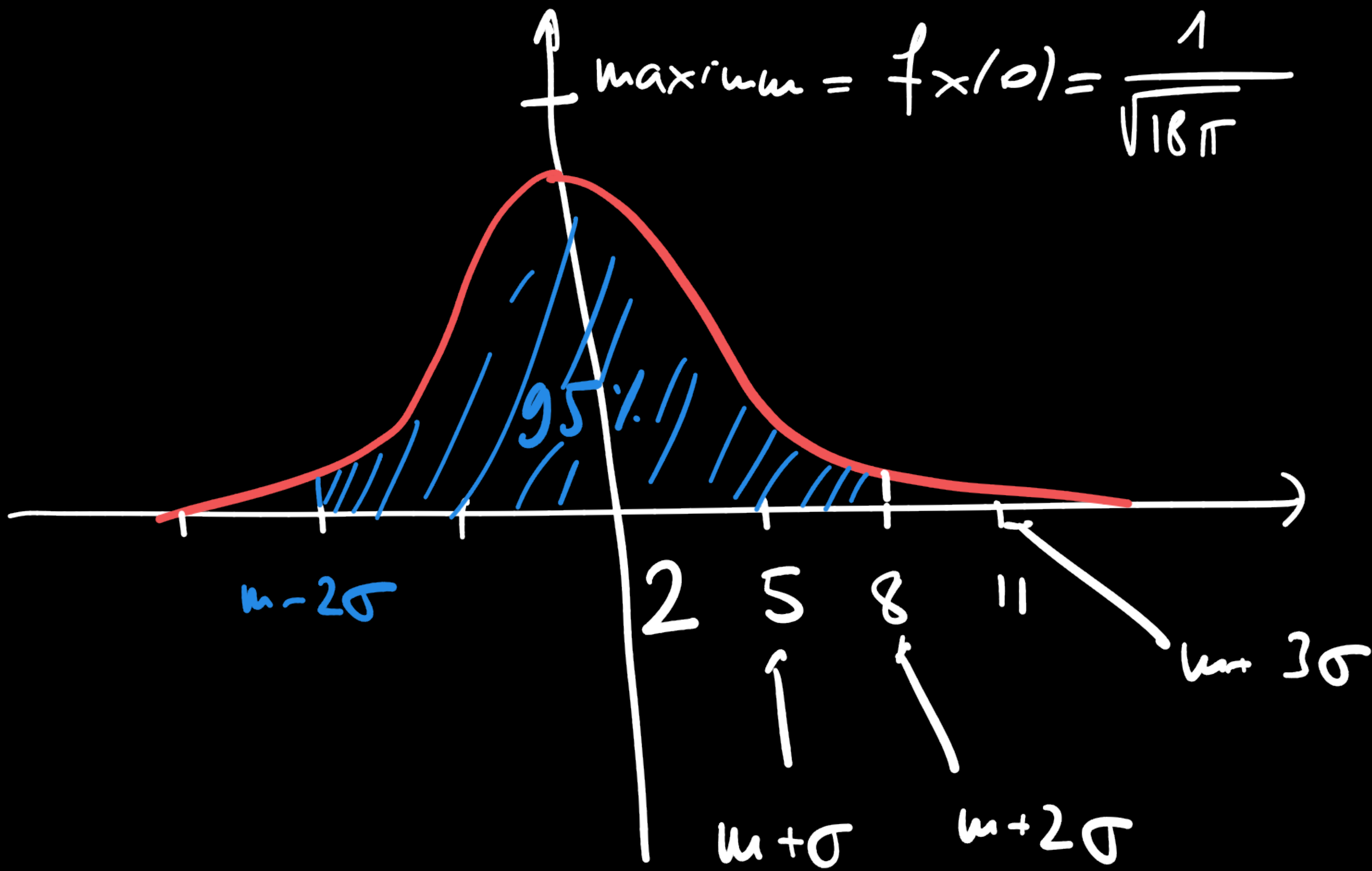


$f_\lambda : x \mapsto 2 \mathbb{1}_{x>0} \cdot e^{-2x}$
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

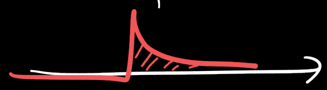
Donner toutes les informations qualitatives remarquables :

- tangentes
- Asymptotes
- points anguleux
- lecture graphique des paramètre

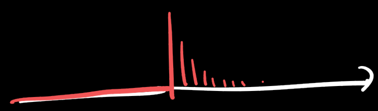
Q5. $m = 2 \quad \sigma^2 = 9 \qquad f_x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 9}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2 \cdot 9}}$



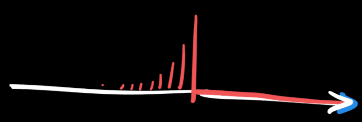
Q6. Loi $\mathcal{E}(\lambda)$ a pour densité :



• Cela signifie que sur un grd nb d'observations, l'histogramme des valeurs observé est comme ceci :



• donc les opposés des valeurs prises par X se distribuent ainsi :



• On s'attend donc à ce que la loi de $-X=Y$ soit donnée par :

$$f_Y : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x<0 \end{cases}$$ (changer x en $-x$ dans f_X)

preuve : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ q.c

donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_-$ q.c.

Donc $\boxed{F_Y(x) = 0 \text{ si } x \geq 0}$ (1)

Soit $x<0$. On calcule $F_Y(x)$:

$[Y \leq x] = [-X \leq x]$
$= [X \geq -x]$

⚠ IL EST FAUX de dire :
~~$[X\geq -x] = [X>-x]$~~ car X est à densité NON

On passe aux probas :

$F_Y(x) = P(X \geq -x)$
$= 1 - P(X<-x)$
$= 1 - P(X \leq -x)$ car X est à densité
$= 1-(1-e^{+\lambda x})$ car $x \leq 0$ donc $-x \geq 0$ donc $F_X(-x) = e^{+\lambda x}$

$\boxed{F_Y(x) = e^{\lambda x} \quad \forall x<0}$ (2)

D'après (1) et (2) : F_Y est $C^0(\mathbb{R}_+^*)$ et $C^0(\mathbb{R}_-^*)$

Comme dans (2) $\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$

dans (1) $\lim_{x\to 0^+} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$,

$\boxed{F_Y \in C^0(\mathbb{R})}$ (3)

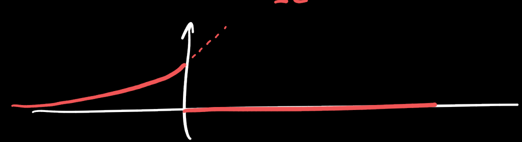
D'après (1) et (2) F_Y est $C^1(\mathbb{R}_-^*)$ et $C^1(\mathbb{R}_+^*)$

$\boxed{F_Y \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf en plus en un seul point}}$ (4)

D'après le cours (3),(4) $\Rightarrow$ • Y est à densité
• une densité de Y s'obtient en dérivant F_Y là où c'est possible (ici : sur $\mathbb{R}^*$)

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ \frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) = \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$\lambda e^{\lambda x}$



$f_Y(x) = \lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-} e^{\lambda x}$

Q7. - f_λ est définie sur $\mathbb{R}$

- f_λ est $C^0(\mathbb{R})$ comme produit de composés de fonctions $C^0(\mathbb{R})$

- f_λ est positive car $\lambda > 0$ et $e^u \geq 0$ $\forall u \in \mathbb{R}$.

- Reste à prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(t)\,dt$ converge et vaut 1.

$f_\lambda \in C^0(\mathbb{R})$ donc : pas d'impropriétés sur $\mathbb{R}$ par continuité.

Les seules impropriétés sont en $\pm\infty$.

<u>Étude en $-\infty/+\infty$</u>

On introduit les intégrales partielles qui se primitivent à vue :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad I(x) = \int_0^x \lambda e^{-t} e^{-\lambda e^{-t}}\,dt$$

$$= \int_0^x u'(t)\, e^{u(t)}\,dt \quad \text{où } u(t) = -\lambda e^{-t}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}. \quad \boxed{I(x) = \left[e^{u(t)} \right]_0^x = e^{-\lambda e^{-x}} - e^{-\lambda}}$$

① Si $x \to -\infty$: $-\lambda e^{-x} \to -\infty$ donc par composition de limites : $I(x) \to -e^{-\lambda}$

donc $\int_0^{-\infty} f_\lambda$ converge et vaut $-e^{-\lambda}$

② Si $x \to +\infty$ $u(x) \to 0$ $I(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-\lambda}$

donc $\int_0^{+\infty} f_\lambda$ converge et vaut $1-e^{-\lambda}$

Par définition, cela signifie que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda$ converge.

Par Chasles, cela donne la valeur de I :

⚠ Chasles ne prouve pas l'existence !

$$I = \underbrace{\left(-e^{-\lambda}\right)}_{\int_0^{-\infty}} + \underbrace{1 - e^{-\lambda}}_{\int_0^{+\infty}} = 1$$

Q8. $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est $C^0(\mathbb{R}^*)$ et définie sur $\mathbb{R}$ positive sur $\mathbb{R}$

Il reste à prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ existe et vaut 1.

Il n'y a pas d'impropriétés sur $\mathbb{R}^*$ par continuité.

Étude des impropriétés en : $-\infty, 0, +\infty$.

$-\infty$: f_n est nulle au voisinage de $-\infty$ donc :

$\int_{-\infty}^{-1} f_n$ converge et vaut 0.

0 : f_n coïncide sur $[0,1[$ et $]-1,0]$ avec des fonctions continues en 0 donc 0 n'est pas une impropriété.

$+\infty$: Les intégrales partielles se primitivent à vue :

en posant $u(t) = 1 - e^{-\lambda t}$:

$$\forall x > 0 \quad \int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^x n\,u'(t)\,u^{n-1}(t)\,dt = \left[u^n(t)\right]_0^x$$

$$= u^n(x) - 0$$

$$= (1 - e^{-\lambda x})^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \text{ car } \lambda > 0.$$

Conclusion $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et, par Chasles, vaut :

$$I = 0 + 1 = 1$$

Classique. Asso et pas simple pour chats. À bien savoir faire

Q9. $Z(\Omega)=\mathbb{R}$ q.c. donc $Z^2(\Omega)=\mathbb{R}_+$ q.c.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

si $x\leq 0$ $F_{Z^2}(x)=0$ car $Z^2(\Omega)=\mathbb{R}_+$. (1)

si $x>0$ $[Z^2\leq x] = [|Z|\leq\sqrt{x}]$ car $u\mapsto\sqrt{u}$ est $\boxed{\text{bijective}}$ et $\nearrow$te sur $\mathbb{R}_+$

d'où l'intérêt que Z^2 et x soient dans $\mathbb{R}_+$!

donc $[Z^2\leq x] = -\sqrt{x}\leq Z\leq\sqrt{x}$

En passant aux probas :

$$\forall x>0 \quad F_{Z^2}(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_Z(t)\,dt$$

$$\underset{\text{parité de } f_Z}{=} 2\int_0^{\sqrt{x}} f_Z(t)\,dt = 2F_Z(\sqrt{x}) \qquad (2)$$

D'après (1) et (2a) - F_{Z^2} est $C^0(\mathbb{R}^*)$.

- $\lim\limits_{t\to 0^+} F_{Z^2}(t) = 0 = F_{Z^2}(0)$.

donc $\boxed{F_{Z^2} \text{ est } C^0(\mathbb{R})}$ (3)

D'après (1) et (2) F_{Z^2} est $C^1(\mathbb{R}^*)$ car F_Z et $\sqrt{\ }$ le sont sur $\mathbb{R}_+^*$, donc F_{Z^2} l'est par composition. (4)

(3) (4) $\Rightarrow$ Z^2 est à densité et on obtient une densité de Z^2 en dérivant (1) et (2) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad f_{Z^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}F_Z'(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}f_Z(\sqrt{x}) \end{cases}$$

Comme $f_Z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$

$$f_{Z^2}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}$$

Q 10.

On écrit que $Z = X + (-Y)$

X et $-Y$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.

La loi de $-Y$ a été calculée en Q.6.

$$f_X(t) = \lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t}$$

$$f_{-Y}(t) \underset{Q6}{=} \mu \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-} e^{\mu t}$$

D'après la formule donnée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_X(t) f_{-Y}(x-t)}_{h(t)} dt.$$

On fixe $x \in \mathbb{R}$. On raisonne sur t :
on cherche pour ce x pour quelles valeurs de t $h(t) > 0$

$$\begin{aligned} h(t) > 0 &\Leftrightarrow f_X(t) > 0 \text{ et } f_{-Y}(x-t) > 0 \\ &\Leftrightarrow t > 0 \text{ et } x - t < 0 \\ &\Leftrightarrow t > 0 \text{ et } t > x \\ &\Leftrightarrow t > \max(0, x). \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \in]\alpha, \beta[& \text{où } \alpha = \max(0,x) \\ f_Z(x) = \int_\alpha^\beta h(t)\,dt & \beta = +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui conduit à introduire le tableau suivant :

x	$-\infty$ ... 0	0 ... $+\infty$
$\alpha =$	0	x
$\beta =$	$+\infty$	$+\infty$
$\alpha < \beta$?	oui	oui

Il y a donc deux calculs à effectuer pour $f_Z(x)$: $\square$ et $\square$ car deux expressions $\neq$ de $f_Z(x)$.

- $\boxed{x \leq 0}$ $f_Z(x) = \int_0^{+\infty} \lambda\mu e^{-\lambda t} e^{\mu(x-t)} dt$

$$= \lambda\mu e^{\mu x} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$

$$\boxed{\forall x \leq 0 \quad f_Z(x) = \lambda\mu e^{\mu x} \times \frac{1}{\lambda+\mu}}$$

- $\boxed{x > 0}$ $f_Z(x) = \int_x^{+\infty} h(t)dt = \lambda\mu e^{\mu x} \int_x^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x} \left[0 + e^{-(\lambda+\mu)x} \right]$$

$$\boxed{\forall x > 0 \quad f_Z(x) = \frac{\lambda\mu e^{-\lambda x}}{\lambda+\mu}}$$