Fonctions de deux variables

[Q1.] Soit $f :]0,2[^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = (x-3/2)^2 + (y-1/2)^2$. Tracer les lignes de niveau -1,0, et 1 de f

[Q2.] Définition de point critique d'une fonction f de deux variables réelles.

[Q3.] Soit $n \geq 2$ un entier, et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et soit $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$. Soit $f : \mathbf{R}^2 \ni (a,b) \mapsto \|y - ax - b\mathbf{1}\|^2 \in \mathbf{R}$. Donner les équations permettant de calculer les points critiques de f.

[Q4.] Soit f une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^1\left(\mathbf{R}^2\right)$, et φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(t) = f(e^t, 1-t^2)$. Calculer $\varphi'(t)$.

Statistiques descriptives

[Q5.] Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une série statistique et $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$ une série statistique certaine. Calculer le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(\mathbf{1})$ et interpréter le résultat à l'aide d'indicateurs statistiques connus.

[Q6.] Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux séries statistiques. Donner les définitions de $\overline{xy}$, $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

[Q7.] Donner la définition de la covariance de deux séries statistiques x, y de $\mathbf{R}^n$ et la réexprimer à l'aide du produit scalaire de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ bien choisis.

[Q8.] Rappeler la formule de Koenig pour la covariance et la démontrer.

[Q9.]

Théorèmes limites

[Q10.] Rappeler les inégalités de Markov et de Tchebychev

[Q11.] Rappeler la loi faibles des grands nombres

[Q12.] Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ un n-échantillon d'une loi de moyenne μ et de variance σ^2. Rappeler la définition de la moyenne empirique M_n.

[Q13.] Avec les notations de la question précédente, calculer $E(M_n)$

[Q14.] Calculer $V(M_n)$

[Q15.] Définition de variable centrée-réduite.

[Q16.] Avec les notations précédente, donner la variable $M_n^\star$ déduite de M_n par centrage-réduction.

[Q17.] Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $p \in]0,1[$ et $(X_N)_{N\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de loi $\mathscr{B}(N,p)$ définies sur un même espace probabilisé. Exprimer :

$$L = \lim_{N\to+\infty} P\left(a \leq \frac{X_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq b\right)$$

sous forme d'une intégrale.

[Q18.] On lance 400 fois une pièce de monnaie. Soit X la VAR égale au nombre de pile observés. Donner la loi de X (justifier).

[Q19.] Donner une approximation de la loi de X par une loi continue dont on précisera les paramètres m et σ^2.

[Q20.] On a observé 231 «pile». Peut-on affirmer que la pièce est truquée ?

[Q21.] Dans le modèle de Wright-Fisher, chaque gène d'une population de $2N$ gènes choisit son père dans $\mathscr{P} = \{1\ldots 2N\}$. Les tirages sont avec remise et mutuellement indépendants. On fixe un gène $i \in \mathscr{P}$. Quelle est la loi de la variable X donnant le nombre de gènes ayant comme père le gène i ?

[Q22.] Proposer une approximation de la loi de X par une loi usuelle à préciser et dont on donnera espérance et variance.

[Q23.] Donner une estimation (qu'on ne cherchera pas à calculer numériquement) de la probabilité que le gène i ait exactement k descendants.