

**CH13 Variables aléatoires à densité**

**[Q1.]** Si  $X$  est une VAR à densité, peut-on, sans calculs affirmer que  $X^2$  est à densité ?

**[Q2.]** Quel objet examiner pour savoir si  $X^2$  est à densité ?

**[Q3.]** Quelles propriétés doit avoir la fonction de répartition de  $X^2$  pour affirmer que  $X^2$  est à densité.

**[Q4.]** Définition et tracé de la courbe de la densité exponentielle de paramètre 2.

**[Q5.]** Tracer la courbe de la la courbe de la densité normale de paramètres (2, 9).

**[Q6.]** Soit  $\lambda > 0$ , et  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Justifier que  $-X$  est une variable à densité qu'on calculera, et dont on tracera la courbe.

**[Q7.]** Soit  $\lambda > 0$ . Montrer que la fonction  $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-x} \times e^{-\lambda e^{-x}}$  est une densité de probabilité.

**[Q8.]** Soit  $\lambda > 0$ . Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction :

$$f_n : x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$$

est une densité de probabilité.

**[Q9.]** Soit  $Z$  une variable aléatoire normale centrée-réduite. Prouver que  $Z^2$  une variable aléatoire de densité  $f_Z : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-1/2} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t)$ .

**[Q10.]** Soit  $\lambda, \mu$  deux réels strictement positifs,  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\mathcal{E}(\lambda)$  et  $\mathcal{E}(\mu)$ . Montrer qu'une densité de la variable  $Z = X - Y$  est :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

**[Q11.]**