CH8, 9 et 11 — Probabilités discrètes

[Q1.] Énoncer la formule des probabilités totales

[Q2.] Définition de SQCE associé à une VAR discrète X

[Q3.] Soit $m \in \mathbf{N}^\star$ Une urne contient n boules numérotées de m à $m+n-1$. On tire une boule au hasard et on note X la variable alétoire égale au numéro observé. Loi de X, espérance, variance.

[Q4.] Une urne contient des boules noires et blanches. On y effectue une suite de tirages. Pour entier $k \geq 1$, la probabilité de tirer une boule blanche est $p_k \in]0,1[$. On effectue des tirages jusqu'à tirer une boule blanche. Dans ce cas le jeu s'arrête. Calculer $P(A)$ où A est l'évènement : «le jeu s'arrête.»

[Q5.] Soit $N \in \mathbf{N}^\star$ et $i \in [\![0, 2N]\!]$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{2N} j\binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(1-\frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$

[Q6.] Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On y effectue n tirages successifs avec remise et on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus. Déterminer les lois de X_2 et X_3.

[Q7.]

[Q8.] Soit (E) une éprevue de Bernoulli de paramètre de succès $p \in]0,1[$. Pour tout entier $k > 0$, on note : A_K l'évènement «On observe un succès lors de k-ème réalisation de (E) ». On fixe un entier n et on note pour $1 \leq k \leq n$, $S_{k,n}$: « Sur les n réalisations de (E), il y a eu exactement deux succès, observés aux rangs k et n.» Exprimer $S_{k,n}$ à l'aide des A_j.

[Q9.] Exprmier l'évènement D_n :« le deuxième succès est apparu au rang n» en fonction des $S_{k,n}$.

[Q10.] Calculer $P(D_n)$

[Q11.] Soit N une VAR de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On tire un entier n suivant la loi de N, puis on lance n fois une pièce truquée faisant pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Soit X la VAR égale au nombre de pile observés. Loi de X ?