Diagonalisation

[Q1.] Soit $A = pm\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisble, donner ses valeurs propres λ_1 et λ_2 ainsi que deux vecteurs propres associés dont la coordonnée sur la deuxième composante vaut 1.

[Q2.] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ telles que $A^{\mathsf{T}}A = PDP^{-1}$ et de sorte que la première ligne de P ne soit constituée que de 1.

[Q3.] Soit $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & & \dots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \dots & & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que 1 est valeur propre de M et donner un vecteur propre associé.

[Q4.] Même question pour A : déterminer une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$

[Q5.] Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $J_n \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice de coefficient général $\gamma_{i,j}$ donné par :

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } n-j+1 = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donner J_1, J_2, J_3, J_4.

[Q6.] Montrer que J_4 est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible Q telles que $Q^{-1}DQ = J_4$.

[Q7.] Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $K_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ la matrice de coefficient général $k_{i,j}$ donné par :

$$k_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = i+1 \\ -n-1+j & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donner K_1, K_2.

[Q8.] Calculer le spectre de K_1.

[Q9.] La matrice K_1 est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

[Q10.] Diagonaliser K_1 le cas échéant.