Q1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

A est triangulaire donc le spectre de A est constitué de ses coefficients diagonaux.

$$Sp(A) = \{-1, -2\}.$$

A a deux v.p. distinctes et est de taille 2×2, donc :
- A est diagonalisable
- ses sev propres sont de dimension 1. (*)

(*) ⟹ les équations des sev propres sont des équations de droites du plan, donc il est facile d'en obtenir des vecteurs directeurs

$\underline{\lambda = -1}$: $A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $y - x = 0$

vecteur directeur : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda = -2$ $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $x = 0$

vecteur directeur $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Q2 Un produit matriciel donne :

$$S = A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ symétrique réelle donc diagonalisable.

① Méthode classique :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in sp(S) \iff S - \lambda I_3$ non inversible :

$$S_\lambda = S - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ \boxed{-1} & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 \\ \boxed{-1} & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + (2-\lambda)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

B

où $\alpha = -1 - (2-\lambda) = \lambda - 3$

$\beta = -1 + (2-\lambda)^2 \underset{\text{id.rem}}{=} (1-\lambda)(3-\lambda)$

Comme $rg(S_\lambda) = 1 + rg(B)$: $rg(S_\lambda) < 3$
$\iff rg(B) < 2$
$\iff \det B = 0$

On calcule $\det B = \alpha(\lambda-3) + \beta(\lambda-3)$
$= (\lambda-3)(\alpha+\beta)$
$= (\lambda-3)(\lambda-3)\lambda$

donc $\boxed{sp(S) = \{0, 3\}}$

Détermination des sev propres

$\lambda = 3$: $S - 3I_3 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1.

Donc $E_3(S) = \mathrm{Ker}(S - 3I_3)$ est de dimension 2.
C'est un plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x+y+z=0$ $(*)$
Une base en est $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car ces vecteurs sont libres.

$\lambda = 0$: $\mathrm{Ker}(S)$ est la droite orthogonale à $\mathrm{Vect}(U,V) = E_3(S)$ d'après le théorème spectral.
D'après $(*)$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur car il est normal à $E_3(S)$

La juxtaposition de bases des sev propres fournit une matrice $P = (U|V|W)$ inversible diagonalisant S en :

$$P^{-1} S P = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Q 3. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) $U \neq 0$ et par produit matriciel :

$$MU = U \quad (2)$$

donc : U est vecteur propre d'après (1) et (2)

indispensable !

et il est associé à la valeur propre 1.

Q4. Même travail qu'en Q2

$$A_\lambda := A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & -1-\lambda^2 \\ 0 & -(1+\lambda) & 1-\lambda \\ \boxed{1} & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \end{matrix} \qquad (*)$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $\lambda \overset{P}{\mapsto} (1-\lambda)^2 - (1+\lambda)(1+\lambda^2)$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \cancel{1} - 2\lambda + \cancel{\lambda^2} - \cancel{1} - \cancel{\lambda^2} - \lambda - \lambda^3 \\ &= -(\lambda^3 + 3\lambda) \\ &= -(\lambda^2+3)\lambda = -(\lambda + i\sqrt{3})(\lambda - i\sqrt{3})\lambda. \end{aligned}$$

- $Sp(A) = \{0, -i\sqrt{3}, +i\sqrt{3}\}$: A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car elle possède 3 v.p. distincts et elle est de taille 3×3.
- Les sev propres sont de dimension 1, donc : tout vecteur non nul d'un sev propre en constitue une base.

$\lambda = 0$. $Col1 + Col2 + Col3 = 0$ donc $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker A$.

$\lambda = i\sqrt{3}$. $A - i\sqrt{3} I_3 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 1 & -1 \\ -1 & -i\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -1 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & s+1 & 2 \\ 0 & s-1 & s+1 \\ \boxed{1} & -1 & s \end{pmatrix}$$

d'après $(*)$ En posant $s = -i\sqrt{3}$ et notant que $s^2 = -3$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & s-1 & s+1 \\ 1 & -1 & s \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow (s-1)L_1 - (s+1)L_2$$

préserve le rang car $s-1 \neq 0$!

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(s-1) - (s+1)^2 \\ &= \cancel{2s} - 2 - s^2 - \cancel{2s} - 1 \\ &= -s^2 - 3 = 0 \text{ car } s^2 = -3 \end{aligned}$$

(prévisible, sinon le rang serait 3)

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{s-1} & s+1 \\ \boxed{1} & -1 & s \end{pmatrix}$$

On a une variable libre : z.
On peut la fixer à $z = 1$ car on cherche une solution non nulle au système.
On remonte : $(s-1)y = -(s+1)z$

$$y = -\frac{s+1}{s-1} = \frac{1+s}{1-s} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -e^{i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$$

$$\begin{aligned} x &= -sz + y = i\sqrt{3} + y \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3} = \bar{y}. \end{aligned}$$

Finalement $\ker(A - i\sqrt{3} I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} \\ e^{-2i\pi/3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $A + i\sqrt{3} I_3 = \overline{A - i\sqrt{3} I_3}$

$$\ker(A + i\sqrt{3} I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} e^{-2i\pi/3} \\ e^{2i\pi/3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, en notant $j = e^{2i\pi/3}$ $\bar{j} = j^2 = e^{-2i\pi/3}$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalise A en $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Q5 et Q6

$n=1$ $\quad n-j+1=i \iff i+j=2$

donc $J_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

$n=2$ $\quad n-j+1=i \iff i+j=3$ $\quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$n=3$ $\quad n-j+1=i \iff i+j=4$ $\quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n=4$ $\quad J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rem : les matrices J_k sont obtenues en recopiant en sens inverse les vecteurs de la base canonique. Elles sont donc inversibles car les colonnes sont libres

Q6. Les valeurs propres sont 1 et -1 (calcul!)

$$\mathcal{E}_1 = \operatorname{Ker}(J_4 - I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{E}_{-1} = \operatorname{Ker}(J_4 + I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ diagonalise J_4

ie $\quad Q^{-1} J_4 Q = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Q7.

K_1 : de taille 2×2

$k_{1,2} = 1$

$k_{2,1} = -1-1+1 = -1$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'énoncé nous dit :

$k_{i,i+1} = i$

$k_{j+1,j} = j-(n+1)$

$k_{i,j} = 0$ sinon.

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rem : on voit que $k_{i,j} \neq 0 \iff |i-j| \neq 1$.

autrement dit seuls les coeffs sur-et sous-diagonaux sont non nuls

Q8 $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(K_1 - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$: spectre $\pm i$

Q9 : Spectre vide dans $\mathbb{R}$: K_1 pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Spectre dans $\mathbb{C}$: 2 v.p. distincts pour K_1 de taille 2×2.

K_1 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

(toute matrice P diagonalisant K_1 a des coeffs non réels)

Q10 Diagonalisons sur $\mathbb{C}$:

$K_1 + iI_2 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ de rang 1 obligatoirement

donc équation du noyau : $ix + y = 0$

Vecteur directeur : $\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(K_1 + iI_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(K_1 - iI_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}$ diagonalise K_1

et $P^{-1}K_1P = \begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}$