CH7 — Espaces vectoriels

[Q1.] Soit $u=(1,1,0)$, $v=(0,0,1)$ et $w=(1,-1,0)$. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

[Q2.] Soit $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \quad (a,b)\in\mathbf{R}^2\right\}$. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

[Q3.] Soit $n\in\mathbf{N}^\star$ et $A\in\mathcal{M}_n(R)$ donnée. Soit $\mathscr{C}_A=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad AMA=A\}$. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

[Q4.] Soit $n\in\mathbf{N}^\star$,$I=[0,\pi]$, $E=\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit $f_k=\cos^k$. Montrer que la famille $(f_0,\dots,f_k)$ est libre.

[Q5.] Soit $n\in\mathbf{N}^\star$,$I=]-\pi/2,\pi/2[$ $E=\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On note $\mathscr{F}_n=(f_k)_{0\le k\le n}$ où f_k sont les fonctions définies par

$$\forall x\in\mathbf{R}\quad f_k(x)=\cos^{n-k}(x)\sin^k(x).$$

Justifier que $V_n=\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_n)$ est un espace vectoriel.

[Q6.] Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$ et $x\in I$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k(x)=0 \iff \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\tan^k(x)=0.$$

[Q7.] En déduire une base et la dimension de V_n.

[Q8.] Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$ et u, v, w les trois vecteurs de E définis par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad u(t) = e^t \quad v(t) = \cos t \quad w(t) = \sin t.$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$ est une famille libre.