Q1. Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé,

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{T}$,

alors :

- $\forall A \in \mathcal{T}$, la série de t.g. $P_{H_n}(A)P(H_n)$ converge
- sa somme vaut $P(A)$.

Q2. Soit X une VAR sur un espace probabilisé et notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ son espace image.

Le SQCE associé à X est :

$$([X = x_k])_{k \geq 1}$$

Q3. $X(\Omega) = \{m, m+1, \dots, m+n-1\}$.

On remarque que $Z = X-(m-1)$ suit la loi $\mathcal{U}(n)$

donc $\forall k \in X(\Omega) \quad P(X=k) = P(Z = k-(m-1))$

$$= \frac{1}{n}.$$

$E(X), V(X)$ existent car X est une variable finie.

- Comme $X = Z + m-1$, par linéarité de l'espérance : $E(X) = E(Z) + m - 1$

$$\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2} + m - 1}$$

- Par invariance par translation de V,

$$V(X) = V(Z).$$

Rappel : calcul de $V(Z)$

Koenig : $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$

Calcul de $E(Z^2)$:

$$E(Z^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

Formule de transfert

$$V(Z) = \frac{(n+1)(2n+1)}{2 \times 3} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right]$$

$$= \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Q_4 : on note B_k : " le k^e tirage donne blanc ".

$$J = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} B_k$$

les B_k sont deux à deux incompatibles,

par σ-additivité, la série de t.g. $p_k = P(B_k)$

converge et $P(J) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$

Q.5. On reconnaît l'espérance d'une loi $\mathcal{B}\left(2N, \frac{i}{2N}\right)$

donc la somme vaut $2N \times \frac{i}{2N} = i$

Q6.

$n=2$. On peut tirer sur les deux tirages 2 fois le même numéro, ou 2 numéros distincts.

$X_2(\Omega)=\{1,2\}$.

X_2-1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=P(X_2=2)$.

En notant T_j la VAR égale au numéro obtenu au tirage j $(1\leq j\leq 2)$,

$T_j \sim \mathcal{U}(2)$ et les T_j sont indépendantes puisque les tirages sont avec remise

Comme $[X_2=2] = \underbrace{[T_1=1]\cap[T_2=2]}_{A} \cup \underbrace{[T_1=2]\cap[T_2=1]}_{B}$

$$p = P(A)+P(B)$$
$$= P(T_1=1)\times P(T_2=2)+P(T_1=2)\times P(T_2=1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

d'où

$k=$	1	2
$P(X_2=k)$	$1/2$	$1/2$

$X_2 \sim \mathcal{U}(2)$

• $n=3$. $X_3(\Omega)=\{1,2,3\}$.

Même travail en introduisant T_j $(1\leq j\leq 3)$
$T_j \sim \mathcal{U}(3)$

. $[X_3=1] = \bigcup_{k=1}^{3}\left(\bigcap_{j=1}^{3}[T_j=k]\right)$

donc $P(X_3=1) = 3\cdot\frac{1}{3^3} = \frac{1}{9}$

. $[X_3=3] = \underbrace{[T_1=1\cap T_2=2\cap T_3=3]\cup\ldots\cup\ldots}_{\text{réunion de 6 réalisations correspondant aux } 3!=6 \text{ permutations possibles des 3 numéros observés}}$

$$P(X_3=3) = 6\times\frac{1}{3^3} = \frac{2}{9}$$

d'où $P(X_3=2) = 1-\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}$

Q7. Oubli dans le sujet.
Cherchez avant de lire la solution.

Énoncé : Soit $p \in]0,1[$ $q = 1-p$.
Nature de la série $\sum_{k \geq 2} \underbrace{\left(kpq^{k-1} + kqp^{k-1}\right)}_{u_k}$

et somme le cas échéant.

Convergence :
le t.g. est CL de t.g. de séries géométriques tronquées (de raisons respectives q et p). Ainsi $\sum_{k \geq 2} u_k$ converge.

Calcul :
Par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k = p \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} + q \sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1}$$

$$= p\left(\frac{1}{p^2} - 1\right) + q\left(\frac{1}{q^2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{p} - p + \frac{1}{q} - q$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Q8

$$S_{k,n} = A_k \cap A_n \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k \\ j \neq m}}^{m} \overline{A}_j$$

Q9

$$D_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} S_{k,n}$$

Q10 les $S_{k,n}$ sont deux à deux incompatibles puisque si $k \neq k'$ le 1er succès ne peut être observé simultanément aux rangs k et k'.

Donc $P(D_n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(S_{k,n})$

Par ailleurs, en supposant les répétitions de (E) mutuellement indépendantes :

$$P(S_{k,n}) = P(A_k) \times P(A_n) \times \underbrace{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n \\ j \neq k}}^{n} P(\bar{A_j})}_{\text{produit de } n-2 \text{ termes}}$$

$$= p \times p \times (1-p)^{n-2}$$

$$= p^2 q^{n-2} \quad \text{en notant } q = 1-p.$$

D'où $P(D_n) = \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2}$

$$\boxed{P(D_n) = (n-1)\, p^2 q^{n-2}}$$

loi du tps d'attente du 2e succès

Q11. ⚠ Ne pas dire que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)$
car N est une VAR, pas un entier.

- les lois conditionnelles de X sous l'observation de $[N=n]$ sont des lois $\mathcal{B}(n,p)$, sous l'observation de $[N=n]$, le nombre de poles observés est décrit par un schema de Bernoulli.

- $X(\Omega)=\mathbb{N}$ car le nombre de pole peut être 0, et prendre n'importe quelle valeur.

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probas totales avec le SCE associé à N, la série $\sum_{n\geq 0} P(X=k|N=n)P(N=n)$ converge et sa somme vaut $P(X=k)$:

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k|N=n)P(N=n) \quad (*)$$

Si $[N=n]$ est observé, $[X=k]$ est incompatible avec $[N=n]$ pour $k>n$. Donc dans $(*)$, les termes de la somme sont nuls si $n<k$.

D'où :

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=k|N=n)P(N=n)$$
$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \underbrace{\binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}_{a_k}$$

On simplifie

$$a_k = \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}$$

d'où par glissement d'indices et linéarité de la somme :

$$P(X=k) = e^{-\lambda} p^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{n!} \lambda^{n+k}$$
$$= e^{-\lambda}(\lambda p)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda}(\lambda p)^k e^{\lambda q}$$
$$= e^{-\lambda(1-q)}(\lambda p)^k$$
$$= e^{-\lambda p}(\lambda p)^k$$

On reconnait une loi $\mathcal{P}(\lambda p)$