Q1. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F} = (u, v, w)$

$\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3 \iff A$ est inversible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $\mathrm{rg}(A^T)$

$$A^T \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B

$\mathrm{rg}(A^T) = 3 \iff \det B \neq 0$

or $\det B = -2 \neq 0$

donc $\mathrm{rg}(A^T) = 3 = \mathrm{rg}(A)$ d'après le cours

A est inversible et $\mathcal{F}$ est une base.

Q2. $\mathcal{M}$ est sous forme param, donc en séparant les V.L., on met en évidence la forme Vect de $\mathcal{M}$.

$$\mathcal{M} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(I_3, K \right) \quad \text{où} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}$ est bien un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q3. $\mathcal{C}_A$ est donné sous forme d'équations.

→ on applique la déf.

- $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $0 \in \mathcal{C}_A$ car $A0A = 0$.
- Si $M \in \mathcal{C}_A$, $N \in \mathcal{C}_A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $M+\lambda N \in \mathcal{C}_A$

$$\begin{aligned} A(M+\lambda N)A &= AMA + \lambda ANA \\ &= M + \lambda N \quad \text{car } M \in \mathcal{C}_A,\ N \in \mathcal{C}_A \end{aligned}$$

Ceci prouve que $M+\lambda N \in \mathcal{C}_A$.

Q4. Soit $\lambda_0 \dots \lambda_k$ k+1 scalaires

tq. $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_k f_k = 0$. (*)

Montrons que $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$

ici vecteur = fonction donc (*) est une égalité de fonctions

Ainsi : $\forall x \in [0,\pi]$ $\lambda_0 + \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos^2 x + \dots + \lambda_k \cos^k x = 0$. (1)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_k X^k$.

Comme l'image de I par cos est $[-1,1]$, (1) nous dit : $\forall t \in [-1,1]$ $P(t) = 0$.

Le polynôme P a une infinité de racines car $[-1,1]$ est un ensemble infini (⚠ infini ≠ borné)

Donc P est nul, donc $\lambda_i = 0$ $\forall i$

Q5. En tant que Vect, V_n est un sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

Q6. sur I, $\cos^n x \neq 0$ donc

la relation :

$$\forall x \in I \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0$$

est équivalente, après division par $\cos^n x$ par :

$$\forall x \in I \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tan^k x = 0 .$$

Q7. la fonction tan prend toutes les valeurs réelles quand x parcourt $]-\pi/2, \pi/2[$.

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0 \quad (1)$$

$$\underset{Q6}{\iff} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tan^k = 0$$

$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad P(t) = 0$ où $P = \sum_{0}^{n} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$

$\iff \quad P = 0$

$\iff \lambda_i = 0 \ \forall i$ car seul le polynôme nul a tous ses coefficients nuls (2)

On a prouvé que (1) $\Rightarrow$ (2) : $\mathcal{F}_n$ est libre

Comme $\mathcal{F}_n$ est génératrice de V_n par définition de Vect, $\mathcal{F}_n$ est une base de V_n et

$$\dim V_n = n+1.$$

Q8. Soit α, β, γ trois scalaires tel que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

Montrons que $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$

on a : $\alpha u = -\beta v - \gamma w$

La fonction $-\beta v - \gamma w$ est bornée

puisque : $\forall t \in \mathbb{R} \quad |-\beta \cos t - \gamma \sin t| \leq |\beta| + |\gamma|$

donc la fonction αu est bornée.

Or si $t \to +\infty$ $u(t) \to +\infty$ donc $\boxed{\alpha = 0}$

d'où $\beta v = -\gamma w$

la fonction βv est paire

donc la fonction $-\gamma w = \beta v$ aussi.

donc $\boxed{\gamma = 0}$ puisque sinus est impaire

d'où $\beta v = 0$

$\boxed{\beta = 0}$ car v n'est pas la fonction nulle