CH6 — Polynômes

[Q1.] Soit μ un réel tel que $|\mu| < 2$. Prouver que le polynôme $X^2 - \mu X + 1$ possède deux racines réelles conjuguées et de module 1.

[Q2.] On considère la suite de polynômes $(H_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{R}[X]$ définie par :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_1 = 2X \\ \forall n \geq 0 \qquad H_{n+2} = 2XH_{n+1} - 2(n+1)H_n \end{cases}$$

Calculer H_2, H_3.

[Q3.] Déterminer le terme dominant de H_n, et prouver le résultat.

[Q4.] Soit I un intervalle non vide et f une fonction non constante continue sur I. Soit P un polynôme tel que : $\forall t \in I$, $P(f(t)) = 0$. Montrer que P est nul.

[Q5.] Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et . Montrer que pour tout entier $i \in \{0\dots n\}$, il existe un unique $P_i \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \{0\dots n\}$, $P_i\left(x_j\right) = 0$ si $i \neq j$, et $P_i(x_i) = 1$.
