Polynômes

Q1.

Je peux supposer que $\mu = 2\cos\theta$, avec $\theta \in]0,\pi[$

puisque $\mu \in]-2,2[$.

Par suite : $X^2 - \mu X + 1 = X^2 - 2X\cos\theta + 1$

$= (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

ce qui prouve le résultat.

Q2. On calcule posément :

$$H_2 = 2XH_1 - 2\cdot 1\cdot H_0$$
$$= 2X\cdot 2X - 2\cdot 1$$
$$= 4X^2 - 2$$

$$H_3 = 2XH_2 - 2\cdot 2\cdot H_1$$
$$= 2XH_2 - 4H_1$$
$$= 2X(4X^2-2) - 4\cdot 2X$$
$$= 8X^3 - 12X$$

Q3. La question Q2 laisse deviner que $H_n = \boxed{\boxed{2^n} X^n} + R_n$

où R_n est un polynôme de degré $< n$: cette écriture est l'expression algébrique de la phrase : « le terme dominant de H_n est $2^n X^n$ »

⚠ Vocabulaire : $\square$ = coefficient dominant (scalaire)

$\square$ = terme dominant (= monôme)

On prouve notre conjecture par récurrence

Comme la déf de H_k utilise les 2 H_j qui précèdent, je suis obligé de faire une récurrence à deux pas.

Hypothèse de récurrence : (A_n) : $\begin{cases} H_n = 2^n X^n + R_n \\ H_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R_{n+1} \end{cases}$ avec $\deg(R_j) < j$

(A_0) est vraie d'après la donnée de H_0 et H_1 en posant $R_0 = 0$ et $R_1 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose (A_n) et on prouve (A_{n+1}), ce qui revient à prouver que :

$$(A_n) \Rightarrow H_{n+2} = 2X^{n+2} + R_{n+2} \text{ où } R_{n+2} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$$

On calcule :

$$H_{n+2} = 2X\left(2^{n+1}X^{n+1} + R_{n+1}\right) - 2(n+1)H_n$$

$$\underset{\text{dvpen}}{=} 2^{n+2}X^{n+2} + R_{n+2}$$

où on a posé $R_{n+2} = 2XR_{n+1} - 2(n+1)H_n$

Calculons $\deg(R_{n+2})$:

$$\deg(2XR_{n+1}) \leq 1 + 2n \leq 2n+1$$

$$\deg(2(n+1)H_n) \leq n \text{ car } 2n+2 \in \mathbb{R}.$$

par somme $\deg(R_{n+2}) \leq 2n+1$ ■

Q4 . f est continue sur I qui est un intervalle :

$J = f(I)$ est un intervalle d'après le T.V.I.

. J est un intervalle contenant au moins deux points car f est non constante.

Conclusion : J possède une infinité d'éléments. (*)

L'hypothèse se reformule en :

$$\forall x \in J \quad P(x) = 0$$

D'après (*), cela veut dire que P a une infinité de racines.

D'après le cours, cela veut dire que **P est nul**.

Q5. Existence.

Soit $i \in \{0 \dots n\}$. P_i admet pour racines les n nombres de l'ensemble $\{x_0 \dots x_n\} - \{x_i\}$.

Donc, à une constante près $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$P = \alpha \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (X - x_k)$$ où la notation :

$\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n}$ signifie : produit de $k=0$ à n sauf $k=i$.

La condition $P_i(x_i) = 1$ fixe la valeur de α :

$$\alpha = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k)}$$

D'où : $$P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(X - x_k)}{(x_i - x_k)} \quad (*)$$

ce qui prouve .... l'unicité ! ⟵ on a prouvé : Si il existe P_i, ce ne peut être que celui de $(*)$

Existence : Posons $P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(X - x_k)}{(x_i - x_k)}$

- $P_i \in \mathbb{R}_n[X]$ car il est produit de n facteurs de degré 1. ✓
- P_i a pour racines $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ ✓
- $P_i(x_i) = 1$ par calcul ✓ . Donc P_i existe bien