Équations différentielles

[Q1.] Résoudre l'équation différentielle $z' + 2z = e^{-2t}$.

[Q2.] Soit I un intervalle ouvert non vide et $a \in \mathscr{C}^0(I)$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = ay.$$

1. Donner les solutions de (E).
2. En déduire que toute solution de (E) qui s'annule une fois sur I est nulle sur I.
3. Soit ensuite $C \in \mathbf{R}$ une constante, $b \in \mathscr{C}^0(I)$ et z une fonction vérifiant sur I l'équation différentielle :
$$(E') \qquad y' = b \cdot y \cdot (y - C).$$
Montrer que la fonction $z - C$ vérifie alors sur I l'équation différentielle : $y' = b \cdot z \cdot y$, et en déduire que si z prend une fois la valeur C dans I, alors z est constante égale à C sur l'intervalle I.

[Q3.] Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. Donner en fonction de λ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = 0$.
2. Déterminer en fonction de λ l'ensemble des solutions réelles f de l'équation différentielle $y'' + \lambda y = 0$ vérifiant $y(0) = y(1) = 0$.

Calcul intégral - Primitivation

[Q4.] Primitives sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto e^{-x} \times e^{-e^{-x}}$

[Q5.] Montrer que pour tout entier $i > 1$: $\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

[Q6.] Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

[Q7.] Soit a, b deux entiers et $I_{a,b} = \displaystyle\int_a^b x^a(1-x)^b$. Trouver une relation valable pour tout entier $a \geq 1$ entre $I_{a,b}$ et $I_{a-1,b+1}$.