Inégalités

[Q1.] Montrer que pour tout réel $x > 0$ $\ln x \leq x - 1$.

[Q2.] Étudier sur $\mathbf{R}_+$ le signe de $x \mapsto xe^{-x} - 1$

[Q3.] Montrer que pour tout entier $k \geq 2$:

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Études locales ou globales de fonctions

[Q4.] Soit a, b deux entiers et $f_{a,b} : x \mapsto x^a(1-x)^b$. Tracer les courbes de $f_{1,1}$ et $f_{2,1}$ sur $[0,1]$.

[Q5.] Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n - \ln x - n$

[Q6.] Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Étudier $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n - \ln x - n$

[Q7.] Soit f une fonction définie sur $I = \mathbf{R}_+$ telle que :

$$\forall t \in I \quad f(t) \in]0,1[\quad \text{et} \quad t + 5 = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{f(t)[2-f(t)]^3}{[f(t)-1]^4}\right).$$

Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ existe et vaut 1.

[Q8.] Soit $\lambda > 0$, et $\varphi : x \mapsto e^{\lambda(x-1)} - x$.

1. Montrer que si $\lambda \leq 1$, φ s'annule une seule fois sur $[0,1]$ (*commencer par étudier* φ'').
2. Montrer que si $\lambda > 1$, φ s'annule exactement deux fois sur $[0,1]$ (*commencer par prouver que* φ' *ne s'annule qu'une seule fois en un réel* $\alpha \in [0,1]$ *que l'on ne cherchera pas à calculer*).