

**Suites**

[Q1.] Calculer un équivalent de  $\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}$

[Q2.] Donner un équivalent simple de  $\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$

[Q3.] Montrer que  $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$ .

[Q4.] Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ .

[Q5.] Soit  $x \in \mathbf{R}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

[Q6.] Soit  $k$  un entier fixé. Trouver la limite de  $\frac{2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{1/N^2}$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .

[Q7.] Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , et  $(w_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :  $w_0 \in \mathbf{R}$ , et  $\forall n \in \mathbf{N} \quad w_{n+1} = w_n + \alpha(1 - w_n)$ . Justifier que  $(w_n)_{n \geq 0}$  est convergente et donner sa limite.

**Inégalités**

[Q8.] Montrer que pour tout réel  $x > 0$   $\ln x \leq x - 1$ .

[Q9.] Étudier sur  $\mathbf{R}_+$  le signe de  $x \mapsto xe^{-x} - 1$

[Q10.] Montrer que pour tout entier  $k \geq 2$  :

$$\int_{k-1}^k \frac{dt}{t+1} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

### Études locales ou globales de fonctions

[Q11.] Soit  $a, b$  deux entiers et  $f_{a,b} : x \mapsto x^a(1-x)^b$ . Tracer les courbes de  $f_{1,1}$  et  $f_{2,1}$  sur  $[0, 1]$ .

[Q12.] Soit  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ . Étudier  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n - \ln x - n$

[Q13.] Soit  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ . Étudier  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n - \ln x - n$

[Q14.] Soit  $f$  une fonction définie sur  $I = \mathbf{R}_+$  telle que :

$$\forall t \in I \quad f(t) \in ]0, 1[ \quad \text{et} \quad t + 5 = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{f(t)[2-f(t)]^3}{[f(t)-1]^4} \right).$$

Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  existe et vaut 1.

[Q15.] Soit  $\lambda > 0$ , et  $\varphi : x \mapsto e^{\lambda(x-1)} - x$ .

1. Montrer que si  $\lambda \leq 1$ ,  $\varphi$  s'annule une seule fois sur  $[0, 1]$  (commencer par étudier  $\varphi''$ ).

2. Montrer que si  $\lambda > 1$ ,  $\varphi$  s'annule exactement deux fois sur  $[0, 1]$  (commencer par prouver que  $\varphi'$  ne s'annule qu'une seule fois en un réel  $\alpha \in [0, 1]$  que l'on ne cherchera pas à calculer).