Équations différentielles

Q1. (E) : $z' + 2z = e^{-2t}$

- (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants non homogène.
- D'après le théorème de structure on obtient les solutions de (E) en ajoutant à une solution particulière z_p n'importe quelle solution de l'équation homogène (H) associée.
  - Solutions de (H) : $z' + 2z = 0$
    Ce sont les fonctions $\begin{array}{l} t \mapsto \lambda e^{-2t} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ variable libre
  - Calcul d'une solution particulière.
    (forme un peu plus expéditive de la variation de la constante) :
    méthode du facteur intégrant :
    Comme $\forall t \in \mathbb{R}$ $e^{2t} \neq 0$ (E) $\iff \underbrace{(z' + 2z)e^{2t}}_{\text{dérivée de } ze^{2t} = u} = 1$

$$\iff u' = 1$$

$$\iff u(t) = t + k \quad k \in \mathbb{R}.$$

Comme je cherche une solution particulière, je peux choisir $k = 0$, je trouve p.ex : $z_p(t)e^{2t} = t$

d'où $z_p(t) = te^{-2t}$

- Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\begin{array}{l} t \mapsto \lambda e^{-2t} + te^{-2t} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Q2. (E) $y' = ay$

1_ (E) est une EDL, homogène résolue en y.

D'après le cours les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où A est une primitive sur $\mathbb{R}$ de a.

2_ Si y est une solution alors : $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. (*)

Si y s'annule en un point t_0 : $y(t_0) = 0$

donc $\lambda e^{A(t_0)} = 0$

donc $\underline{\lambda = 0}$ car $e^{A(t_0)} \neq 0$.

donc $\underline{y(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ d'après } (*)}$

3_ z vérifie : $z' = b \cdot z \cdot (z - C)$ (1)

Comme $C \in \mathbb{R}$ $z' = (z-C)'$ donc $(1) \iff (z-C)' = bz \cdot (z-C)$

Ainsi $z - C$ est solution de : $u' = bz \cdot u$

La fonction $a = bz$ est $C^0(I)$ car $b \in C^0(I)$ et z aussi puisqu'elle est dérivable sur I.

D'après 2, on conclut que : si $z - C$ s'annule une fois, $z - C$ est nulle, c-à-d : si z prend une fois la valeur C, z est constante sur I égale à C.

Q.3. (E) $y'' + \lambda y = 0$

C'est une EDL_2 homogène à coefficients constants.
Elle se résout par la méthode de l'équation caractéristique.
L'équation caractéristique est :
$$(eq) \quad x^2 + \lambda = 0$$
⚠ ce n'est pas $x^2 + \lambda x = 0$ (erreur fréquente)

On distingue 3 cas :

① $\lambda < 0$. Posons $\lambda = -\alpha^2$ où $\alpha = \sqrt{|\lambda|} \geq 0$
les racines de (eq) sont réelles : $x_{1,2} = \pm\sqrt{|\lambda|}$

donc $y = A e^{\sqrt{|\lambda|}\, t} + B e^{-\sqrt{|\lambda|}\, t}$ pour 2 constantes A, B (variables libres)

② $\lambda = 0$. (eq) a une racine double : $\lambda = 0$.
les solutions sont dans ce cas :
$$y = (At + B) \quad \text{pour 2 réels } A, B.$$

③ $\lambda > 0$. $\lambda = \omega^2$ avec $\omega = \sqrt{\lambda}$, $\omega > 0$.
les solutions sont les fonctions :
$$t \mapsto A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

2. Les 2 équations $y(0) = 0$ et $y(1) = 0$ déterminent les valeurs de A et B dans les 3 cas.

Cas ① $\begin{cases} A + B = 0 \\ Av + \frac{B}{v} = 0 \end{cases}$ où $v = e^{\alpha}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ Av^2 + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 0.$

y est nulle.

Cas ② $A = B = 0$. (droite horizontale)

Cas ③ $\begin{cases} A = 0 \\ B \sin \omega = 0 \end{cases}$ solution nulle, mais il existe des solutions non nulles si

(*) ω est de la forme $\omega_k = k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas, il y a une infinité de solutions :
$$t \mapsto B \sin(\omega_k t) \quad B \in \mathbb{R} \text{ v.l.}$$

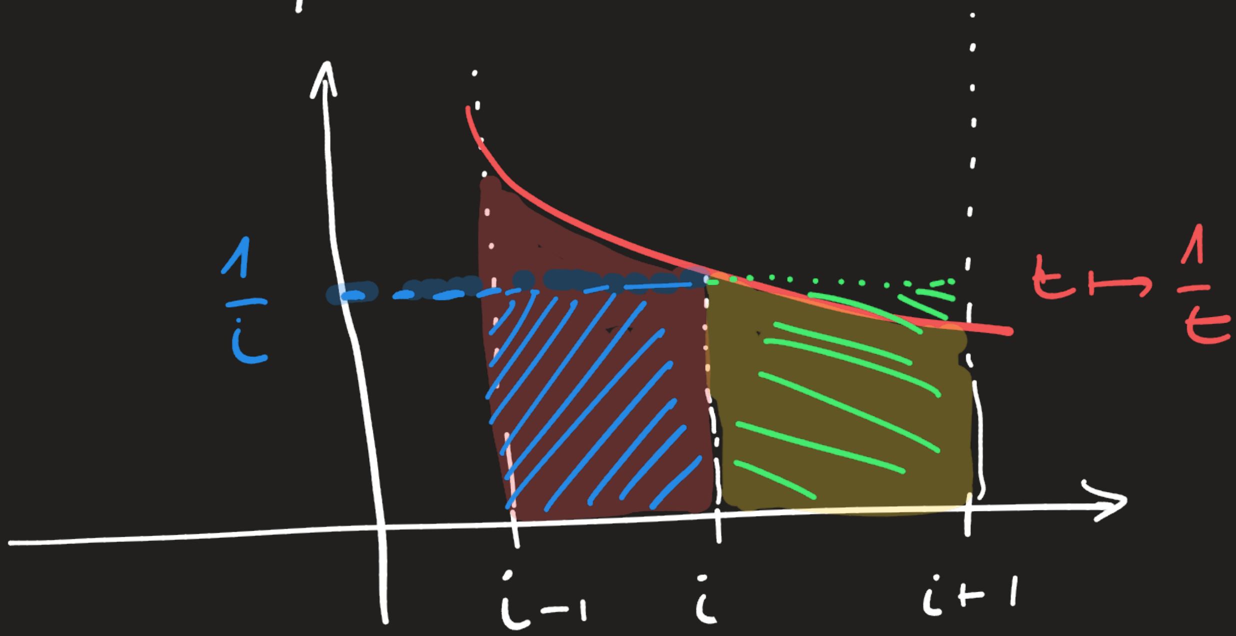
rem : La condition (*) s'appelle condition de quantification

Q4.- Se primitive à une... l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ s'obtient par ajout d'une constante à une primitive particulière.

Comme $\quad e^{-x} e^{-e^{-x}} = u' \times e^{u}$ où $u = -e^{-x}$

les primitives sont les fonctions $t \mapsto e^{-e^{-t}} + C \quad C \in \mathbb{R}$

Q5. Grand classique :

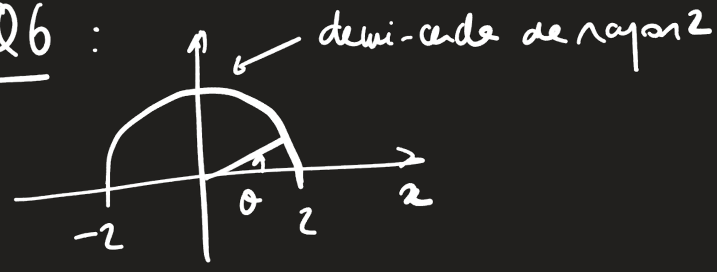


$\forall t \in [i-1, i] \qquad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{i}$

donc par $\nearrow$ce de l'intégrale : $\underbrace{\int_{i-1}^{i} \frac{dt}{t}}_{} \geq \underbrace{\int_{i-1}^{i} \frac{dt}{i}}_{} = \frac{1}{i}$

De même : $\forall t \in [i, i+1] \qquad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{i}$ d'où $\int_{i}^{i+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{i}$

Q6 :



on pose $x = 2\cos\theta$ $\theta \in [0, \pi]$

Cette relation définit un changement de variables bijectif C^1 de $\theta \in [0,\pi]$ sur $[-2,2]$.

Il vient : $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{4 - (2\cos\theta)^2}\,(-2\sin\theta)\, d\theta$

$\theta =$	0	π
	2	-2

$dx = -2\sin\theta\, d\theta$

donc $\displaystyle I = -\int_{\pi}^{0} 2\sqrt{4(1-\cos^2\theta)}\,\sin\theta\, d\theta$

$\displaystyle = 4\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta}\ \sin\theta\, d\theta$

$\displaystyle = 4\int_0^{\pi} |\sin\theta|\sin\theta\, d\theta$

Or, si $\theta \in [0,\pi)$, $\sin\theta \geq 0$ donc $|\sin\theta| = \sin\theta$

d'où $\displaystyle I = 4\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$

il va falloir linéariser $\sin^2\theta$ pour primitiver.

Or : $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ donc $-4\sin^2\theta = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2$

i.e. $4\sin^2\theta = 2 - 2\cos 2\theta$

d'où $\displaystyle I = \int_0^{\pi} 2 - 2\cos 2\theta\, d\theta$

$\displaystyle = \int_0^{\pi} 2\, d\theta - 2\int_0^{\pi} \cos 2\theta\, d\theta$

$I = 2\pi$

(aire d'un demi-disque de rayon 2)

Q7. Relation entre intégrales : dans 99% des cas : IPP.

Soit $a \geqslant 1$

Posons $u : t \mapsto t^a$

$v : t \mapsto -\dfrac{(1-t)^{b+1}}{b+1}$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ car polynomiales,

par IPP, puisque $I_{a,b} = \int_0^1 u(t)v'(t)\,dt$

on trouve : $$I_{a,b} = \left[-\frac{t^a(1-t)^{b+1}}{b+1}\right]_0^1 + \underbrace{\frac{a}{b+1}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b+1}\,dt}_{\frac{a}{b+1} I_{a-1,b+1}}$$

Le terme entre crochets est nul car :

- $0^a = 0$ parce que $a \geqslant 1$
- $(1-1)^{b+1} = 0$ car $b \geqslant 0$.

D'où $$\boxed{I_{a,b} = \frac{a}{b+1} I_{a-1,b+1}}$$