Q1 (A) Si $x \geq 1$

on écrit : $\forall t \in [1, x] : \quad \frac{1}{t} \leq 1$

Par croissance de l'intégrale : $\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x dt$

i.e. $\ln x \leq x - 1$

(B) Si $0 < x \leq 1$

On écrit : $\forall t \in [x, 1] : \quad \frac{1}{t} \geq 1$

par ↗ce de l'intégrale :

$$\int_x^1 \frac{dt}{t} \geq \int_x^1 \frac{dt}{t}$$

Rem :

$$-\ln x \geq 1 - x$$

(1) ⚠ pour appliquer la ↗ce de l'intégrale, quand on intègre de a à b, IL FAUT QUE $a < b$, d'où la distinction de cas (A) / (B)

(2) on peut simplement faire une étude de fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto \ln x - (x-1)$

Q2. $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto xe^{-x} - 1$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de produit de fonctions usuelles.

Par règles de calcul sur la dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = (-x+1)e^{-x}$$

D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$+$	0	$-$	
f'		$+$		$-$	
f	-1	$\nearrow$	M	$\searrow$	

Le maximum de f est atteint en $x=1$ et vaut $\underbrace{\frac{1}{e}-1}_{M} < 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leq 0$

Q3. Déjà vu en feuille 9.

Soit $k \geq 2$ et $t \in [k-1, k] = I$

on a donc :

$$\boxed{k-1 \leq \boxed{t} \leq k}$$

donc

$$\boxed{t \leq \boxed{k} \leq t+1}$$

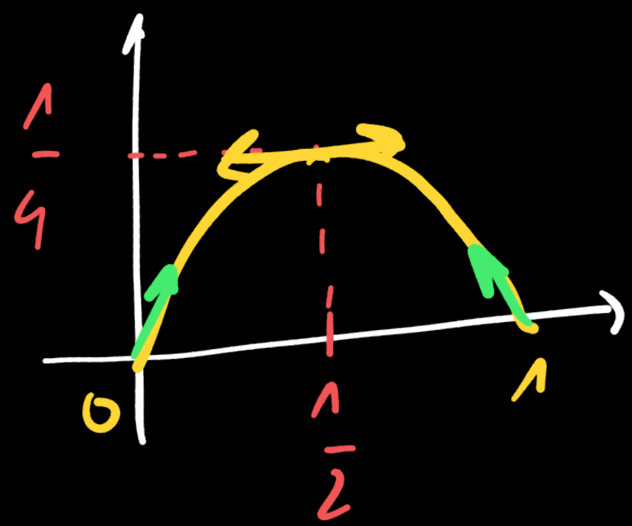
Par décroissance sur I de $u \mapsto \frac{1}{u}$:

$\forall t \in [k-1, k]$ $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$.

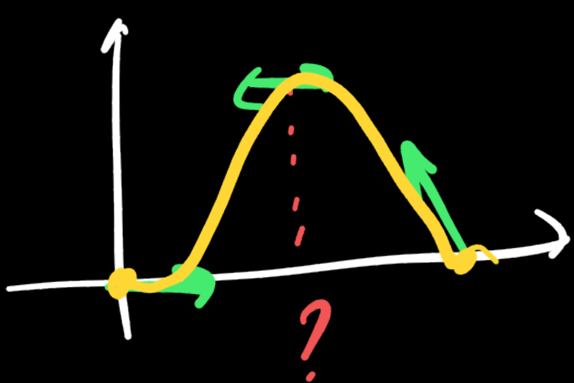
On conclut par croissance de $\int_{k-1}^{k}$ (car $k-1 \leq k$)

Q4. ⚠ Tracés qualitatifs attendus :
- valeurs remarquables
- symétries éventuelles
- tangentes
- asymptotes

$f_{1,1}(x) = x(1-x)$ ← trinôme : . 2 racines : 0 et 1
. concave ($f(x) = -x^2 + \dots$)
. sommet au milieu des racines



$f_{2,1}(x) = x^2(1-x)$: 0 est racine double
→ tangente horizontale en 0.
→ un extremum (Rolle)



Q5. Forme indéterminée → équivalent requis.

On a une somme : factoriser par le terme le + ht sur l'échelle de croissance devrait suffire :

x^n

$\ln x$

1

$$f(x) = x^n\left(1 - \frac{\ln x}{x^n} - \frac{n}{x^n}\right)$$

$$= x^n\left(1 + o(1) + o(1)\right) \quad x \to +\infty$$

par

par opérations sur les limites

$$f(x) = x^n(1+o(1))$$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^n$. Comme $n \geqslant 2$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Q.6. Comme $n \geqslant 2$ $x^n = o(1)$ $x \to 0$.

Par somme de limites : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Q7. Très intéressant (et simple !)

Comme toujours pour les calculs de limite, il faut trouver dans la relation qui est terme prépondérant (= celui qui impose le comportement)

$$\underbrace{t+5}_{\text{tend vers } \infty} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{f(t)(2-f(t))^3}{(f(t)-1)^4} \right)$$

A

tend vers ∞ ·····> ····donc celui-ci doit tendre vers +∞.

La question est donc : dans A, qui est responsable du fait que $A \to \infty$?

Réponse : $f(t) \in]0,1[$ donc le numérateur reste borné (en pos, il ne dépasse pas $1 \times 2^3 = 8$).

Conclusion : c'est $(f(t)-1)^4$ qui régit tout.

Cette analyse (qualitative, mais incontournable) étant faite, on écrit donc :

$$\frac{f(t)(2-f(t))^3}{(f(t)-1)^4} = e^{4(t+5)}$$

d'où :

$$(f(t)-1)^4 = \underbrace{\frac{f(t)(2-f(t))^3}{e^{4(t+5)}}}_{g(t)} \quad \forall t>0.$$

Comme $f(t) \in]0,1[$, $\left| f(t)(2-f(t))^3 \right| \leq |f(t)| \times |2-f(t)|^3$
$\leq 1 \times 2^3 = 8$

$e^{4(t+5)} \to +\infty$ donc par quotient et gendarmes :

$$|g(t)| \leq \frac{8}{e^{4t+20}} \to 0.$$

donc $|f(t)-1| \underset{t\to\infty}{\to} 0$

i.e. $f(t) \underset{t\to\infty}{\to} 1$

Q8. φ est 2 fois dérivable car c'est une somme de composée de fonctions C^∞.

On calcule :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \varphi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$

d'où : $\quad \varphi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} > 0$ car $e^t > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

Ce qui donne le tableau suivant :

t	0		1
φ''		$+$	
φ'	$\lambda e^{-\lambda} - 1$	$\nearrow$	$\boxed{\lambda - 1}$

Si $\boxed{\lambda \leq 1}$ $\quad \varphi'(1) \leq 0$. Comme φ' est strictement croissante sur $[0,1]$: $\forall t \in [0,1[$ $\quad \varphi'(t) < \varphi'(1) \leq 0$

Ainsi φ est strictement décroissante sur $[0,1]$.

t	0		1
$\varphi(t)$		$\searrow$	0

Comme $\varphi(1) = 0$, φ ne s'annule qu'une fois.

2. Si $\lambda > 1$ $\quad \varphi'$ est C^0 sur $[0,1] = I$, I est un intervalle et φ' est strictement croissante sur I.

D'après le théorème de la bijection : φ' est bijective de $[0,1]$ sur $J = \varphi'([0,1])$ qui est un intervalle.

Or $\varphi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 \leq \lambda - \underset{\leq 0}{1}$, car $e^{-\lambda} \leq 1$

$\varphi'(1) = \lambda - 1 > 0$.

donc $0 \in J$: $\exists ! \alpha \in]0,1[$ $\quad \varphi'(\alpha) = 0$.

Ce qui donne :

	0		α		1
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$e^{-\lambda} > 0$	$\searrow$	$M < 0$	$\nearrow$	0

Comme $\varphi(1) = 0$ $\quad M < 0$ par stricte croissance de φ sur $[\alpha, 1]$: $\quad \exists ! \beta \in]0, \alpha[$ tq $\boxed{\varphi(\beta) = 0}$

. en appliquant le th de la bijection à φ sur $[0, \alpha]$.

. sur $]\alpha, 1]$: $\boxed{\text{une seule racine } 1.}$

Il y a bien exactement 2 points d'annulation à φ.