Q1. Soit $n \geqslant 1$

Soit $u_n = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n}$.

On remarque que : $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Or, un $DL_2(0)$ donne : $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

D'où : $$u_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n = -\frac{1}{2n^2}(1+o(1)) \quad n \to +\infty.$$

c-à-d. $u_n \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$

Q2. Soit $v_n = \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$

$$-v_n = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \quad \text{par équivalent usuel.}$$

d'où $\quad v_n \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$

Q3. On écrit :

$$\forall n \geq 1 \quad \ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \quad (*)$$

Ensuite, on montre que $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$:

En divisant $(*)$ par $\ln n$ pour $n \geq 2$:

$$\forall n \geq 2 \qquad \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \underbrace{\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}}_{A}$$

A tend vers 0 par quotient de limites (pas de forme indéterminée).

d'où $\ln(n+1) \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

Q4. On pose $u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

On étudie $v_n = \ln u_n = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$v_n \underset{n\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{1}{n}\right)$, par équivalent usuel $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

et par produit d'équivalents.

Ainsi $v_n \underset{n\infty}{\sim} -1$ (*)

Donc $v_n \xrightarrow[n\infty]{} -1$. Par composition de limites, on trouve

(⚠ on ne compose pas les équivalents donc on n'écrit pas $u_n \sim e^{-1}$)

que $u_n = e^{v_n} \to e^{-1} = 1/e$ ■

Q J. Copié-collé de Q4.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x.$$

⚠ traiter à part le cas $x=0$ car on ne peut pas écrire $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ pour $x=0$!

Q6. Soit $u_N = \dfrac{2\left(1-\cos\frac{k\pi}{N}\right)}{1/N^2}$

. Je suppose $k \neq 0$.

si $N \to +\infty$ $\quad \frac{k\pi}{N} \to 0$ donc $1-\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k^2\pi^2}{2N^2}$

d'où $u_N \underset{N\infty}{\sim} k^2\pi^2$ par quotient d'équivalents

. si $k=0$ $\quad u_N = 0$. $\quad u_N \to 0$.

Q7. La relation de récurrence est arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_{n+1} = (1-\alpha) w_n + \alpha \quad (1)$$

Soit C une solution réelle de :

$$C = (1-\alpha) C + \alpha \quad (2)$$

(1) − (2) donne : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = (1-\alpha) z_n \quad (3)$

où on a noté $z_n = w_n - C$.

(3) montre que la suite (z_n) est géométrique,

d'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = z_0 \cdot (1-\alpha)^n$.

revenant à w_n :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = C + (1-\alpha)^n (w_0 - C).$$

Il ne reste plus qu'à calculer C avec (2)

$$C = 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = 1 + (1-\alpha)^n (w_0 - C)$$