Nom :
Prénom :

Développer :

[Q1.] $\dfrac{A+B}{C}$ $\boxed{\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}}$

[Q2.] $\dfrac{A+B}{C+D}$ $\boxed{\dfrac{A}{C+D}+\dfrac{B}{C+D}}$

[Q3.] $\dfrac{A}{B+C}$ $\boxed{\dfrac{A}{B+C}}$

[Q4.] $(e^x)^3$ $\boxed{e^{3x}}$

[Q5.] $(2^n)^2$ $\boxed{2^{2n}=4^n}$

[Q6.] $\left(2^{2^n}\right)^2$ $\boxed{2^{2^{n+1}}}$

[Q7.] $e^{-x+1}(e^x-1)$ $\boxed{e-e^{-x+1}}$

[Q8.] $\binom{n}{2}$ $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

Factoriser :

[Q9.] $e^{-x^2+x}+e^x$ par e^x $\boxed{e^x\left(e^{-x^2}+1\right)}$

[Q10.] x^2-4x $\boxed{x(x-4)}$

[Q11.] x^4-3x^2 $\boxed{x^2(x^2-3)}$

[Q12.] x^4-4x^2 $\boxed{x^2(x-2)(x+2)}$

[Q13.] 4^n-2^n $\boxed{2^n(2^n-1)}$

[Q14.] $48-3x^4$ $\boxed{3(2-x)(2+x)(x^2+4)}$

[Q15.] 4^n-2^n $\boxed{2^n(2^n-1)}$

[Q16.] $x^\alpha - x^{\alpha-1}$ $(\alpha > 1)$ $\boxed{x^{\alpha-1}(1-x)}$

[Q17.] $2^{2n+1}-2^{2n}$ $\boxed{2^{2n}}$

[Q18.] $2^{-(2n+1)}-2^{-2n}$ $\boxed{-2^{-(2n+1)}}$

[Q19.] $x^{n+1}-x^{n-1}+2nx^n$ $\boxed{x^{n-1}(x^2+2nx-1)}$

[Q20.] t^4-2t^2+1 $\boxed{(t-1)^2(t+1)^2}$

[Q21.] $1-u^4$ $\boxed{(1-u)(1+u)(1+u^2)}$

[Q22.] $3x^2-3$ $\boxed{3(x-1)(x+1)}$

[Q23.] t^4-2t^2+1 $\boxed{(t-1)^2(t+1)^2}$

[Q24.] $(x+y)^2-4xy$ $\boxed{(x-y)^2}$

[Q25.] $(\theta \in \mathbf{R})$ $x^2-2x\cos\theta+1$ $\boxed{(x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta})}$

[Q26.] $1+2+3+\cdots+n$ $\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

Simplifier :

[Q27.] $1-(1-x)(1-y)+xy$ $\boxed{x+y}$

[Q28.] Soit $p \in]0,1[, q = 1-p, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit X une VAR de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Simplifier $P(X=0)$.

$\boxed{q^n}$

[Q29.] Soit $p \in]0,1[, q = 1-p, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit X une VAR de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Simplifier $P(X=1)$.

$\boxed{npq^{n-1}}$

[Q30.] Soit $p \in]0,1[, q = 1-p, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit X une VAR de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Simplifier $P(X=n)$.

$\boxed{p^n}$

[Q31.] Soit $p \in]0,1[, q = 1-p, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit X une VAR de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Simplifier $P(X=n-1)$.

$\boxed{nqp^{n-1}}$

[Q32.] $\dfrac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}}$ $\boxed{\dfrac{n}{p}}$

[Q33.] $\dfrac{1}{(j+1)j!}$ $\boxed{\dfrac{1}{(j+1)!}}$

[Q34.] $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2}$ $\boxed{\dfrac{1}{x^2(x^2-1)}}$

[Q35.] $\dfrac{-x}{-x+\sin(-x)}$ $\boxed{\dfrac{x}{x+\sin(x)}}$

[Q36.] $\dfrac{u^2+3u-2}{u}$ $\boxed{u+3-\dfrac{2}{u}}$

[Q37.] $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$ $\boxed{(1-\lambda)(1+\lambda)}$

[Q38.] $-\dfrac{1}{\theta}\times\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{\theta+1}{\theta}\right)}\ (\theta>0)$ $\boxed{1}$

[Q39.] $\sqrt{x^2}$ $\boxed{|x|}$

[Q40.] $\sqrt{(1-t)^2}$ $\boxed{|1-t|}$

[Q41.] $\sqrt{(a+b)^2}$	$\lvert a+b\rvert$
[Q42.] $\sqrt{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$	$\lvert\cos\theta\rvert$
[Q43.] $\sum_{k=1}^{2n+1} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k$	u_{2n+1}
[Q44.] Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\alpha^3 = 1$. Calculer $S = 1+\alpha+\alpha^2$	$S=3$ si $\alpha=1$, $S=0$ sinon.
[Q45.] Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\alpha^3 = 1, n \in \mathbf{N}$. Calculer $\left(\alpha^{n+2}\right)^2 + (-\alpha)^{2n+1}$	0
[Q46.] 3^{2n}	9^n
[Q47.] Soit $n \in \mathbf{N}$ $(-1)^{2n+1} - (-1)^{2n}$	-2
[Q48.] $\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)$	t
[Q49.] $e^{\ln 2 - \ln\left(\frac{1}{a}\right)}$	$2a$
[Q50.] $e^{2\ln t}$	t^2
[Q51.] $e^{-\ln x}$	$1/x$
[Q52.] $\dfrac{6\ln(t+1)}{3\ln t}$	$2\dfrac{\ln(t+1)}{\ln t}$
[Q53.] $\dfrac{36}{30}$	$\dfrac{6}{5}$
[Q54.] $\dfrac{51}{34}$	$\dfrac{3}{2}$

[Q55.] $(-1)^{2n}-(-1)^{2n+1}$ — 2

[Q56.] $\binom{10}{4}$ — 180

[Q57.] $\binom{8}{3}$ — 56

[Q58.] $\binom{8}{4}$ — 70

[Q59.] $\binom{8}{4}$ — 70

[Q60.] $\binom{9}{4}$ — 126

[Q61.] $1+2+3+\cdots+n-\binom{n}{2}$ — n

[Q62.] $2\dfrac{k!}{(k+1)!}$ — $\dfrac{2}{k+1}$

Valeurs et erreurs classiques

[Q63.] $\cos(\pi/3)=$ — $1/2$

[Q64.] $\cos(2\pi/3)=$ — $-1/2$

[Q65.] $e^{i\pi}=$ — -1

[Q66.] $e^{-i\pi}=$ — 1

[Q67.] $e^{2i\pi}=$ — 3

[Q68.] Calculer $0^0+0!+1^0$ — $L=1$ si $\alpha=0$ ou 1 ; $L=+\infty$ si $\alpha\in]0,1[$; $L=0$ si $\alpha>1$

[Q69.] Soit $\alpha \geq 0$. Calculer $L = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\alpha(\alpha-1)}$

$L = 0$ si $\gamma > 0$; $L = 1$ si $\gamma = 0$; $L = +\infty$ si $\gamma < 0$

[Q70.] Soit $\gamma \in \mathbf{R}$. Calculer $L = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\gamma}$

$L = 0$ si $\gamma < 0$; $L = 1$ si $\gamma = 0$; $L = +\infty$ si $\gamma > 0$

Équations - inéquations

[Q71.] Résoudre $x^2 = x$

$x = 0$ ou $x = 1$

[Q72.] Résoudre $x^2 \geq x$

$x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

[Q73.] Résoudre $x^2 < x$

$x \in]0, 1[$

[Q74.] Résoudre $|x|^2 < |x|$

$x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$

[Q75.] Résoudre $x^2 < |x|$

$x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$

[Q76.] Résoudre $|x|^2 < x$

$x \in]0, 1[$

Inégalités et valeurs absolues

[Q77.] Convertir en inégalités en valeurs absolues $x \in]-1, 1[$

$|x| < 1$

[Q78.] Convertir en inégalités en valeurs absolues $x \in [-1, 1]$

$|x| \leq 1$

[Q79.] Convertir en inégalités en valeurs absolues $x \in]1, 3[$

$|x - 2| < 1$

[Q80.] Convertir en inégalités en valeurs absolues $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$

$|x - a| \leq \varepsilon$

[Q81.] Convertir en inégalités en valeurs absolues $x^2 \leq a^2$

$|x| \leq |a|$

[Q82.] Donner la longueur de l'intervalle $[a,b]$ $\boxed{b-a}$

[Q83.] Donner le milieu du segment $[a,b]$ $\boxed{\frac{a+b}{2}}$

Dériver :

[Q84.] $x \mapsto f(-x^2)$ $\boxed{-2xf'(-x^2)}$

[Q85.] $x \mapsto (1-x)^3$ $\boxed{-3(1-x)^2}$

[Q86.] $x \mapsto e^{ux^2} \quad (u \in \mathbf{R})$ $\boxed{2xe^{ux^2}}$

[Q87.] $u \mapsto e^{ux^2} \quad (x \in \mathbf{R})$ $\boxed{x^2e^{ux^2}}$

[Q88.] $t \mapsto \sqrt{t}$ $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{t}}}$

[Q89.] $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ $\boxed{\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}$

[Q90.] $s \mapsto -\frac{1}{s}$ $\boxed{\frac{1}{s^2}}$

[Q91.] $x \mapsto \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ $\boxed{f(x)}$

[Q92.] $x \mapsto \int_1^x e^{1/t}\mathrm{d}t$ $\boxed{e^{1/x}}$

[Q93.] $x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$ $\boxed{2f(2x)-f(x)}$

[Q94.] $x \mapsto e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ $\boxed{1+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t}$

Primitiver/calcul intégral

[Q95.] Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_0^1 t^n \mathrm{d}t =$ | $\dfrac{1}{n+1}$

[Q96.] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\mathrm{d}t =$ | 0

[Q97.] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\mathrm{d}t =$ | 1

[Q98.] Soit $k > 0$. Calculer $\int_1^2 t^{-k}\mathrm{d}t =$ | $\dfrac{2^{1-k}-1}{1-k}$ si $k \neq 1$, et $\ln 2$ si $k = 1$.

[Q99.] Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^t \mathrm{d}t =$ | $\dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{2^{k+1}}$

[Q100.] $(a > 0, a \neq 1)$. Donner une primitive de $t \mapsto a^t$ | $t \mapsto \dfrac{a^t}{\ln a}$

[Q101.] $(a > 0)$. Donner une primitive de $t \mapsto t^a$ | $t \mapsto \dfrac{t^{a+1}}{a+1}$

[Q102.] Calculer $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ | 1

[Q103.] Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ | $t \mapsto \dfrac{-2}{\sqrt{t}}$

[Q104.] Calculer $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ | $1/2$

[Q105.] Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ | $\sqrt{2\pi}$

[Q106.] Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ | $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

[Q107.] Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ | $\sqrt{\pi}$

[Q108.] Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

0

[Q109.] Calculer $\int_{0}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

1

[Q110.] Soit $f : t \mapsto \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & \text{si} & t > 1 \\ 0 & \text{sinon} & \end{vmatrix}$. Pourquoi $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 1 ?

La restriction de f à $]1,+\infty[$ coïncide sur $]1;+\infty[$ avec une fonction continue sur $[1;+\infty[$.

[Q111.] Soit $f : t \mapsto \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & \text{si} & t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} & \end{vmatrix}$. Pourquoi $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 1 ?

La restriction de f à $[1,+\infty[$ est continue en 1.

Corriger :

[Q112.] $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

[Q113.] u_n est arithmético-géométrique

(u_n) est arithmético-géométrique

[Q114.] $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$

[Q115.] $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$

[Q116.] $f(x) \underset{x\to 0}{=} 0$

$f(x) = 1 + o(1) \quad x \to 0$ ou $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

[Q117.] Soit X une VAR et t un réel. $[X > t] = 1 - \overline{[X < t]}$

$[X > t] = \overline{[X \leq t]}$

[Q118.] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + o(1)$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

[Q119.]	$u_n \sim 1 + o(1) \quad n \to \infty$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$
[Q120.]	La série tend vers 2	Les sommes partielles convergent vers 2 / La somme de la série est 2
[Q121.]	$\forall x \in I$ f est dérivable	f est dérivable sur I
[Q122.]	$f(x) \in \mathscr{C}^0(I)$	f est continue sur I / $f \in C^0(I)$
[Q123.]	$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cap P_A(B)\cap P_{A\cap B}(C)$	$P(A\cap B\cap C) =$ $P(A)\times P_A(B)\times P_{A\cap B}(C)$
[Q124.]	$AX = 2X$ donc 2 est valeur propre de A.	...comme $X \neq \mathbf{0}, 2 \in \sigma(A)$.
[Q125.]	Soit A un évènement. On a $\bar{A} = 1 - A$.	$1 - A$: non-sens. $\bar{A} = \Omega \setminus A$
[Q126.]	Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ donné par $P = X - 1$. « $X - 1 \geq 0 \iff X \geq 1$ »	Soit $x \in \mathbf{R}$. $P(x) \geq 0 \iff x \geq 1$.
[Q127.]	...Vect(u, v) est de dimension 2 car il contient 2 vecteurs.	Vect(u, v) est de dimension 2 car (u, v) est une famille libre.
[Q128.]	$E_1(A) = A - I_3$	$E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$

Logique

[Q129.]	Indiquer les liens logiques ($\Rightarrow$ / $\Leftarrow$ / $\iff$)	$x < 4$ $x < 5$	$x < 4$ $\Rightarrow \quad x < 5$
[Q130.]	Indiquer les liens logiques ($\Rightarrow$ / $\Leftarrow$ / $\iff$)	$x^2 \geq 0$ $\lvert x\rvert \geq 0$	$x^2 \geq 0$ $\iff \quad x \geq 0$
[Q131.]	Indiquer les liens logiques ($\Rightarrow$ / $\Leftarrow$ / $\iff$)	$x^2 \geq 0$ $x \geq 0$	$x^2 \geq 0$ $\Leftarrow \quad x \geq 0$

Écrire avec le symbole $\sum$

[Q132.] « la série de terme général n^2 $(n \geq 1)$ ».

$\sum_{n\geq 1} n^2$

[Q133.] « la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$ vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$ ».

$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

[Q134.] $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n+2}$

$\sum_{k=1}^{n+1} u_{2k}$

[Q135.] $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n}$

$\sum_{k=0}^{2n} u_k$

[Q136.] $1 + t^2 + t^4 + t^6 + \cdots + t^{2n+2}$

$\sum_{k=1}^{n+1} t^{2k}$

[Q137.] $1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n+2}$

$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k t^{2k}$

[Q138.] Écrire avec $\sum$: $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$

$f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) - 2$ ou $\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - 1$

Calcul matriciel

[Q139.] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

[Q140.] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

[Q141.] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer BA

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

[Q142.] Justifier que 2 est valeur propre $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-1&3&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$ et donner $\dim\operatorname{Ker} A-2I$

$A-2I$ est de rang 1 et $\dim\operatorname{Ker} A-2I=2$.

[Q143.] Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Factoriser $B=A^3-3A^2+2A$

$B=A(A^2-3A+2I)=(A^2-3A+2I)A$

[Q144.] Soit $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Factoriser $AB-3B$

$(A-3I)B$

[Q145.] Soit $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Factoriser $AB+2A$

$A(B+2I)$

[Q146.] Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $X\in\mathscr{E}_2(A)$. Simplifier : $(A^2+A+I)X$

$7X$

[Q147.] Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $X\in\mathscr{E}_\lambda(A)$. Donner le format de, et simplifier : $Y=(A^3-3A^2+2A+I)X$

$Y=(\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda+1)X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$

[Q148.] Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\lambda\in\sigma(A)$, et $X\in\mathscr{E}_\lambda(A)$. Calculer $(A^3+2A+I)X$

$(\lambda^3+2\lambda+1)X$

[Q149.] Soit $A\in\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ telle que $A^3=I_4$ et $n\in\mathbf{N}^\star$. Calculer $(A^{n+1})^2+(-A)^{2n-1}$

0

[Q150.] Soit $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Développer $(AB)^\top$

$B^\top A^\top$

[Q151.] Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique, et $U\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $V\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Développer $(AU)^\top V$.

$U^\top AV$

[Q152.] Soit $n,p>0$ deux entiers, $X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ et $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Donner l'expression matricielle de $\|AX\|^2$

$X^\top A^\top AX$

[Q153.] Soit $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit C_j la j-ème colonne de A. Donner une colonne X dont on précisera le format telle que $C_j=AX$.

$X=E_j$ où $E_j=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^\top\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ (j-ème vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.)

[Q154.]	Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1, 1)^\top$. Que vaut $\mathbf{1}^\top A \mathbf{1}$?	La somme de tous les coefficients de A.
[Q155.]	Soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $\Pi = A(A^\top A)^{-1}A^\top$. Calculer $\Pi^\top$	$\Pi^\top = \Pi$
[Q156.]	Soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $\Pi = A(A^\top A)^{-1}A^\top$. Calculer Π^2	$\Pi^2 = \Pi$

Calcul de sommes ou de sommes de séries

[Q157.]	$\displaystyle\sum_{k=\alpha}^{\beta} 1$	$\beta - \alpha + 1$
[Q158.]	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
[Q159.]	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$	$\dfrac{1}{n+1} - 1$
[Q160.]	$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$	$\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{2}$
[Q161.]	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$	$n(n+2)$
[Q162.]	$\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$	$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2}$
[Q163.]	$(1-\alpha)^{n-1}$	$\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \alpha^j$
[Q164.]	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$	$2^{n+1} - 1$
[Q165.]	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$	$2(2^n - 1)$

[Q166.] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$	$1-\dfrac{1}{2^n}$
[Q167.] $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$
[Q168.] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$	2^n
[Q169.] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$	$2^n n-1$
[Q170.] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}$	2^n-1
[Q171.] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$	$(1+x)^n$
[Q172.] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k$	$(1+x)^n-1$
[Q173.] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k$	$(1+x)^n-x^n$
[Q174.] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\alpha^k$	$(1+\alpha)^{n-1}$
[Q175.] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$1-q^n\ (q=1-p)$
[Q176.] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np
[Q177.] $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}q^k\ (\lvert q\rvert<1)$	$\dfrac{1}{1-q}$
[Q178.] $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}q^k\ (\lvert q\rvert<1)$	$\dfrac{q}{1-q}$

[Q179.] $\sum_{k=2}^{+\infty} q^k \; (\lvert q\rvert < 1)$	$\frac{q^2}{1-q}$
[Q180.] $\sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+1} \; (\lvert q\rvert < 1)$	$\frac{q}{1-q}$
[Q181.] $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \; (\lvert q\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-q}$
[Q182.] $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k+1} \; (\lvert q\rvert < 1)$	$\frac{q^2}{1-q}$
[Q183.] $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \; (\lvert q\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-q}$
[Q184.] $\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$	6
[Q185.] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} (\beta > 0)$	$\frac{\beta}{\beta+1}$
[Q186.] $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k+1} \; (\lvert q\rvert < 1)$	$\frac{q^2}{1-q}$
[Q187.] $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \; (\lvert q\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-q}$
[Q188.] $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \; (\lvert q\rvert < 1)$	$\frac{1}{(1-q)^2}$
[Q189.] $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$	e
[Q190.] $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}$	$e-2$
[Q191.] $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$	$e-1$

[Q192.] $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ — e

[Q193.] $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ — $e-1$

[Q194.] $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}}$ — $\frac{2}{3}$

Ensembles

[Q195.] Combien d'éléments dans $E = \left\{x \in \mathbf{R} \quad x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$? — Deux

[Q196.] Combien d'éléments dans $E = \left\{x \in \mathbf{R} \quad x^2 - 4x + 4 = 0\right\}$? — Un

[Q197.] Combien d'éléments dans $E = \left\{x^2 - 4x + 4 \quad x \in \mathbf{R}\right\}$? — Une infinité

[Q198.] Combien d'éléments dans $E = \left\{x^2 - 4x + 4 \quad x \in \{0, 4\}\right\}$? — Un

[Q199.] Combien d'éléments dans $E = \mathrm{Vect}(u)$? — Un seul si $u = 0$, une infinité sinon.

[Q200.] Combien de bases pour $E = \mathrm{Vect}(u)$? — Aucune si $u = 0$, une infinité sinon.

Ensembles pareq et param

[Q201.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E F est un sous-ensemble.

$F = \{(2x + y, 4y - z, x - y + z, x) \quad x, y, z \in \mathbf{R}\}$ — Param. $F \subset \mathbf{R}^4$

[Q202.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad y - z = 0\right\}$ — Par éq. $F \subset \mathbf{R}^3$

[Q203.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \left\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \quad A^{\mathrm{T}} = A\right\}$

$\boxed{\text{Par éq. } F \subset \mathscr{M}_3(\mathbf{R})}$

[Q204.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \left\{\alpha X + \beta (X-1)^2 \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}\right\}$

$\boxed{\text{Param. } F \subset \mathbf{R}[X]}$

[Q205.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & s & -c \\ 0 & c & s \end{pmatrix} \quad a, c, s \in [0,1]\right\}$

$\boxed{\text{Param. } F \subset \mathscr{M}_3(\mathbf{R})}$

[Q206.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \left\{f : \begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto Ce^{-2x} \end{array} \quad C \in \mathbf{R}\right\}$

$\boxed{\text{Param. } F \subset \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{R})}$

[Q207.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \left\{(X^2 + X + 1)P \quad P \in \mathbf{R}[X]\right\}$

$\boxed{\text{Param. } F \subset \mathbf{R}[X]}$

[Q208.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \{P(0) \quad P \in \mathbf{R}[X]\}$

$\boxed{\text{Param. } F \subset \mathbf{R}}$

[Q209.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble. $F = \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \quad k \in \mathbf{N}^{\star}\right\}$

$\boxed{\text{Param. } F \subset \mathbf{R}}$

[Q210.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \{Q \in \mathbf{R}_2[X] \quad Q(-1) = 0\}$

$\boxed{\text{Par éq. } F \subset \mathbf{R}_2[X]}$

[Q211.] Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\boxed{\text{Param. } F \subset \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})}$

[Q212.] Soit $a \in \mathbf{R}$. Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble.

$F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}) \quad f(a) = 0 \right\}$

Par éq. $F \subset \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$

[Q213.] Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$. Dire si F est défini paramétriquement ou par équations, et de quel ensemble E l'ensemble F est un sous-ensemble. $F = \{a \in \mathbf{R} \quad f(a) = 0\}$

Par éq. $F \subset \mathbf{R}$

Mise sous forme de Vect

[Q214.] Donner toutes les bases $E = \mathrm{Vect}(u)$.

Aucune si $u = 0$, une infinité sinon : les familles de la forme (v) où v est tout vecteur non nul de E.

[Q215.] Dire de quel ev E est un sev, puis le mettre sous forme de Vect.

$E = \left\{ (a + c, a + b, d) \quad (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \right\}$

$E = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)) \subset \mathbf{R}^3$

[Q216.] Dire de quel ev E est un sev, puis le mettre sous forme de Vect.

$E = \left\{ f : \begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto Ce^{-2x} \end{array} \quad C \in \mathbf{R} \right\}$

$E = \mathrm{Vect}(f_0) \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ où $f_0 : x \mapsto e^{-2x}$

[Q217.] Dire de quel ev E est un sev, puis le mettre sous forme de Vect.

$E = \left\{ (X^2 + X + 1)P \quad P \in \mathbf{R}_2[X] \right\}$

$E = \mathrm{Vect}\left(X^2 + X + 1, X^3 + X^2 + X, X^5 + X^4 + X^3\right) \subset \mathbf{R}[X]$

[Q218.] Dire de quel ev E est un sev, puis le mettre sous forme de Vect.

$E = \{P \times f \quad P \in \mathbf{R}_1[X]\}$ (f est la fonction exponentielle ici).

$E = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto xe^x) \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$

[Q219.] Dire de quel ev E est un sev, puis le mettre sous forme de Vect.

$E = \left\{ \begin{pmatrix} s & -c \\ c & s \end{pmatrix} \quad c, s \in \mathbf{R} \right\}$

$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \subset \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$

[Q220.] Dire de quel ev E est un sev, puis le mettre sous forme de Vect.

$E = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \quad P(1) = 0\}$

$E = \mathrm{Vect}\left(X^2 + X + 1, X^3 + X^2 + X, X^5 + X^4 + X^3\right) \subset \mathbf{R}_2[X]$

Calcul d'évènements

[Q221.] On note F_k : «Le lancer n° k donne face». Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Écrire avec les F_k : «Le premier face a eu lieu au lancer n»

$\boxed{\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{F_k}\right) \cap F_n}$

[Q222.] On note F_k : «Le lancer n° k donne face». Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Écrire avec les F_k : Il y a eu un face sur les n premiers lancers

$\boxed{\bigcup_{k=1}^{n} F_k}$

[Q223.] On note F_k : «Le lancer n° k donne face». Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Écrire avec les F_k : Obtenir un face au premier lancer implique d'obtenir face au moins une fois sur les n premiers lancers $\boxed{F_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} F_k}$

[Q224.] On note F_j : «Le lancer n° j donne face». Soit $k \in \mathbf{N}^\star$. Écrire avec les F_k : Obtenir un face au lancer k implique d'obtenir face au moins une fois $\boxed{F_k \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k}$

[Q225.] On note F_k : «Le lancer n° k donne face». Le deuxième face a lieu au 3ème lancer. $\boxed{\left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3\right) \cup \left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3\right)}$

[Q226.] On note F_k : «Le lancer n° k donne face». Le deuxième face a lieu au lancer n $\boxed{\bigcup_{k=1}^{n-1} \left(F_k \cap \left[\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} \overline{F_j} \right] \cap F_n \right)}$

[Q227.] On note A_k : «il y a eu (au moins) un face sur les k premiers lancers». Exprimer B_n :« le premier face a lieu au lancer n» en fonction de A_n et A_{n-1} $\boxed{B_n = A_n \setminus A_{n-1}}$

[Q228.] On note A_k : «il y eu (au moins) un face sur les k premiers lancers». Exprimer J : «on n'observe jamais face» en fonction des A_k

$\boxed{J = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}}$

[Q229.] On lance une pièce jusqu'à obtenir pile. On note pour tout entier k, A_k : «on arrête les lancers à l'issue du k-ème lancer.» Exprimer E : «on arrête de lancer la pièce» avec les A_k. $\boxed{E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k}$

[Q230.] On lance une pièce jusqu'à obtenir pile. On note pour tout entier k, B_k : «on fait face jusqu'au lancer k». Exprimer $\overline{B_k}$ à l'aide des C_j : «on arrête les lancers à l'issue du j-ème lancer. »

$\boxed{\overline{B_k} = \bigcup_{j=1}^{k} C_j}$

[Q231.] Soit X une VAR telle que $X(\Omega) \subset \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$. Relation entre $X \leq k$, $[X = k]$ et $[X \leq k-1]$?

$\boxed{[X \leq k] = [X \leq k-1] \sqcup [X = k]}$

[Q232.] Soit X une VAR et $k \in \mathbf{R}$. Simplifier $\overline{[X \leq k]}$

$\boxed{[X > k]}$

[Q233.] Soit X une VAR à densité, $Z = \lfloor X \rfloor$, et $k \in \mathbf{N}$. Exprimer en termes de X : $[Z = k]$

$\boxed{[Z = k] = [k \leq X < k+1]}$

[Q234.] Soit X une VAR à densité, $k \in \mathbf{N}$. Relation entre $[X < k]$, $[X \leq k]$, et $[X = k]$?

$\boxed{[X \leq k] = [X < k] \cup [X = k]}$

[Q235.] Soit X une VAR, $k \in \mathbf{N}$. Relation entre $[X < k]$, $[X \leq k]$, et $[X = k]$?

$\boxed{[X \leq k] = [X < k] \cup [X = k]}$

[Q236.] Soit X et Y deux VAR à valeurs dans $\mathbf{N}$. Expliciter l'évènement $[X = Y]$

$\boxed{[X = Y] = \bigcup_{k=0}^{+\infty} ([X = k] \cap [Y = k])}$

[Q237.] Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, X et Y deux VAR à valeurs dans $\{1, \ldots n\}$. Expliciter l'évènement $[X = Y]$

$\boxed{[X = Y] = \bigcup_{k=1}^{n} ([X = k] \cap [Y = k])}$

Polynômes

[Q238.] Montrer, sans aucun calcul, que les racines de $P = X^2 - 134X - \frac{1}{785}$ sont réelles et de signe opposé.

$P \in \mathbf{R}[X]$ donc : si racines non réelles, le produit est > 0. Oril est négatif. Donc : racines réelles de signe opposé.

[Q239.] Montrer sans les calculer, que les racines de $P = X^2 - X + 1$ sont non réelles de module 1.

$P \in \mathbf{R}[X]$ donc : si racines non réelles, conjuguées. $\Delta < 0$ ici et le produit des racines vaut donc $\bar{z}z = 1$.

[Q240.] Factoriser $P = X^3 - 3X^2 + X + 1$ par $X - 1$

$\boxed{(X-1)(X^2 - 2X - 1)}$

[Q241.] Factoriser $P = X^3 - 1$ par $X - 1$ $\boxed{(X-1)(X^3+X+1)}$

[Q242.] Factoriser $P = X^3 + 3X^2 + 4X + 2$ par $X + 1$ $\boxed{(X+1)(X^2+2X+2)}$

[Q243.] Factoriser $-\frac{\lambda}{2}(-2\lambda^2+2)$ $\boxed{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}$

[Q244.] Factoriser $2X^2 - 6X + 4$ $\boxed{2(X-2)(X-1)}$

Slicing (python)

[Q245.] Combien de termes dans `L[2:8]` ? $\boxed{6}$

[Q246.] Quelle instruction pour extraire de `L` ses 4 premiers termes ? `L[:4]`

[Q247.] Quelle instruction pour extraire de `L` les 11 termes consécutifs à partir de celui d'indice `4` ? `L[4:15]`

[Q248.] Quelle instruction pour stocker dans `a`,`b`,`c` les trois derniers éléments de la lsite `L` ? `a,b,c=L[-3:]`

Range (python)

[Q249.] Combien de passages dans la boucle ?

```
for _ in range(n):
    ...
...
```

n passages

[Q250.] Combien de termes dans `range(2,8)` ?

```
for n in range(2,8):
print(n)
```

`2,3,4,5,6,7`

[Q251.] Compléter pour avoir 11 termes affichés en exécutant :

```
for n in range(15,...):
    print(n)
```

`range(15,26)`

[Q252.] Combien de passages dans la boucle ?

```
for _ in range(1,n):
    ...
...
```

n−1 passages

[Q253.] Combien de termes dans L à la fin ?

```
L=[u]
for _ in range(n):
    L.append(f(u))
...
```

n+1 items

[Q254.] Compléter pour avoir n termes dans L à la fin

```
L=[u]
for _ in range():
    L.append(f(u))
...
```

n−1

Listes en compréhension (python)

[Q255.] Construire en compréhension la liste `L=[2,4,8,16,32,64]`

`L=[2**k for k in range(1,7)]`

Instructions courantes (python)

[Q256.] Quelle commande pour ajouter à la liste `L` un item `a` ?

`L.append(a)` ou `L+=[a]`

[Q257.] Quelle commande pour ajouter à la liste `L` l'objet `[a]` ?

`L+=[[a]]` ou `L.append([a])`

[Q258.] Quelle commande pour concaténer à la liste `L1` la liste `L2` ?

`L1+L2`

[Q259.] Quelle commande pour simuler une $\mathscr{B}(p)$ $(0<p<1)$? (`import random as rd` fait) ?

`rd.random()<p`

Boucles (python)

[Q260.] Quelle boucle pour programmer la méthode de Newton ? Pourquoi ?

`while` car on ne sait pas combien de termes calculer avant d'atteindre la précision souhaitée.

[Q261.] Dans la méthode de Newton on s'arrête quand deux termes consécutifs calculés `u`,`v` sont tels que $|\mathtt{u}-\mathtt{v}| \leq \mathtt{eps}$. Écrire la condition de boucle `while` correspondante

```
while abs(u-v)>eps
```

Programmation de suites (python)

[Q262.] Données : $(u_n)_{n\,\geq 1}$ une suite récurrente donnée par $u_1 = 2$, et pour $n \geq 1$: $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Compléter le script pour qu'il affiche la valeur de u_{10} :

```
u=2
for _ in range(...):
    ...
print(u)
```

```
for _ in range(9):
    u = 1+u**2
```

[Q263.] Données : $(u_n)_{n\,\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites récurrentes données par $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et pour $n \geq 0$: $u_{n+1} = u_n - v_n$, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. Compléter le script pour qu' il affiche les valeurs de u_{12} et v_{12} :

```
u,v=1,-1
for _ in range(...):
    ...
print(u,v)
```

```
for _ in range(12):
    u,v = u-v,2*u+v
```

[Q264.] Données : $(u_n)_{n\,\geq 0}$, suites récurrentes définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour $n \geq 0$: $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Compléter le script pour qu'il affiche la valeur de u_n :

```
u,v=1,1
for _ in range(...):
   w = ...
   u,v =  ...
print(w)
```

```
for _ in range(2,n):
    w = v+2*u
    u,v = v,w
```