

CH1 – Séries numériques

Plan du chapitre

1	Généralités	3
A)	Ce qu'est une série	3
B)	Convergence d'une série	3
C)	Série tronquée	4
D)	Structure vectorielle de l'ensemble des séries	5
E)	Séries de références	6
2	Étude de la convergence des séries	7
A)	Condition nécessaire de convergence	7
B)	Condition suffisante de convergence	7
3	Méthodes d'étude des séries à termes positifs	8
A)	Convergence monotone	8
B)	Équivalents	8
C)	Théorème de comparaison	8

Liste des définitions

Déf.1	Série numérique, terme général (t.g.) d'une série	3
Déf.2	Somme partielle, suite des sommes partielles d'une série	3
Déf.3	Convergence d'une série - somme d'une série - nature d'une série	3
Déf.4	Troncature d'une série	4
Déf.5	Combinaison linéaire de séries	5
Déf.6	Séries exponentielles	7
Déf.7	Série harmonique	7
Déf.8	série grossièrement divergente	7
Déf.9	Absolue convergence	7

Liste des techniques de base

T1.	Séries télescopiques	3
T2.	Calcul de somme d'une série tronquée	4
T3.	Calcul de la somme d'une série géométrique tronquée	6
T4.	Comment étudier la nature d'une série ?	8
T5.	Comment calculer la somme d'une série ?	9
T6.	Comparaison avec une intégrale pour l'étude de $\sum_{n \geq p} f(n)$	10

Grille d'analyse des exercices *du cours ou du TD.*

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques
Exemple 1 du cours	1, 2.	Déf		
Exemple 2		T ₁		
Exemple 3		prop 2		
Exemple 4		T ₃		
Exemple 3'		th 1		
Exemple 5		T ₂		
Exemple 8				
Exemple 7		*		
Exemple 8		th 6		
				voir séries guidées à l'écrit, cf programme de celles

- 1. **T₀** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
- 2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
- 3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
- 4.

★

 Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

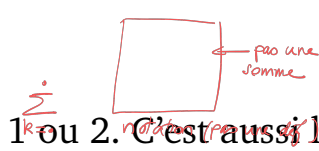
1 Généralités

A) Ce qu'est une série

■ Définition 1 [Série numérique, terme général (t.g.) d'une série]

- C'est un nouveau type d'objet. Ce n'est ni un nombre, ni une suite.
- Un objet de type série est noté : $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

Dans cette notation :

1. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite réelle ou complexe.
2. n_0 est la rang initial de la série, souvent $n_0 = 0, 1$ ou 2 .  C'est aussi le rang initial de la suite (u_n) .
3. u_n s'appelle dans ce contexte le *terme général de la série*. C'est également le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

■ Définition 2 [Somme partielle, suite des sommes partielles d'une série]

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série, la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ de terme général $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ s'appelle *suite des sommes partielles* de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Le nombre S_n s'appelle *somme partielle* (de rang n) de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

■ Proposition 1 [Lien entre t.g et somme partielle d'une série]

Pour la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$: $\forall n > n_0 \quad S_{n-1} + u_n = S_n$

→ preuve : faites-la quand vous relirez

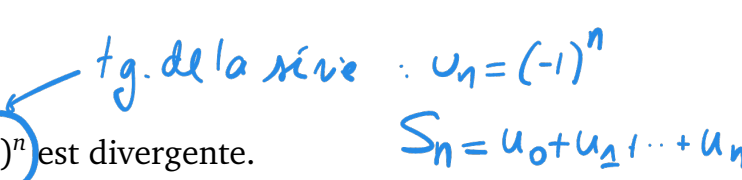
B) Convergence d'une série

■ Définition 3 [Convergence d'une série - somme d'une série - nature d'une série]

Avec les notations des définitions précédentes :

1. La série est dite *convergente* si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ de ses sommes partielles est convergente.
2. La limite ℓ de cette suite s'appelle la *somme* de la série. Elle se note $\ell = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$
3. Si une série n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente*.
4. Étudier la *nature* d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

■ Exemple 1.

1. La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ est divergente. 
2. La série $\sum_{n \geq 0} (1/2)^n$ est convergente, car la suite des sommes partielles tend vers 2. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} (1/2)^n$ a pour somme 2. On écrit donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 2$

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

$$\boxed{S = 0}$$

$$S = 1(-1+1)(-1+1)(-1+1) \dots$$

$$\boxed{S = 1}$$

$$\boxed{0 = 1}$$

→ J'introduis la suite (S_n) des sommes partielles :

$$\forall n \geq 0 \quad S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$$

On reconnaît la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison -1

Comme $-1 \neq 1$:

$$\forall n \geq 0 \quad S_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}$$

La suite de t.g $\frac{1}{2}$

est convergente,

mais la suite de t.g

$(-1)^n$ diverge

par somme, la suite (S_n) diverge.

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2^e lecture Rem : $\underbrace{(-1)^n}_{v_n} \underset{n \geq 0}{\text{diverge}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{2n} = 1$$

$$v_{2n+1} = -1$$

Les sous-suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) n'ont pas la même limite. Donc, d'après le théorème des suites extraites (v_n) diverge.

Rem. le théorème des suites extraites s'applique à la suite (S_n) aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N} : S_{2n} = 1$$

$$S_{2n+1} = 0$$

Or $1 \neq 0$: La suite (S_n) diverge, donc $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ aussi par définition.

2 - On prouve que la suite des sommes partielles tend vers 2.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^n}$$

Par opérations sur les limites, (S_n) converge vers 2,

et donc $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}$ converge.

Comme j'ai prouvé que la série converge vers 2

j'ai le droit d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Exemple 0 : Série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

t.g : $\frac{1}{n}$
1^{er} rang 1

La suite des sommes partielles est la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1 \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Donc :

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

rem : il est clair que

$$\forall n \geq 1 \quad S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$$

En effet
$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}_{S_n} + \frac{1}{n+1}$$

T₁ Séries télescopiques

Ce sont les séries du type $\sum_{n \geq n_0} u_n$ pour lesquelles le t.g est de la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$.

1. Comme les sommes partielles se calculent simplement par télescopage (en effet : $\forall n \geq p : S_n = v_{n+1} - \underbrace{v_{n_0}}_{\text{constante}}$),
2. on conclut de 1. que la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ des sommes partielles converge si et seulement si la suite (v_n) converge, et dans ce cas, la somme de la série est : $S = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right) - v_{n_0}$.

■ Exemple 2.

Étude de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)}$, et calcul de sa somme le cas échéant.

C) Série tronquée (seul souvent en exo)

■ Définition 4 [Troncature d'une série]

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série, et $n_1 \geq n_0$, la série $\sum_{n \geq n_1} u_n$ s'appelle une troncature de la série.

■ Proposition 2 [Invariance de la nature par troncature]

Une série et une troncature de celle-ci sont de même nature. Néanmoins, en cas de convergence, les sommes de ces dernières ne sont pas nécessairement égales. *

■ Exemple 3.

Les séries $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ sont de même nature.

↑ cette série est une troncature de celle-là

■ Remarque 1.

Ce résultat permet de simplifier l'étude de la nature d'une série puisqu'on peut étudier le t.g. ou les sommes partielles seulement à partir d'un certain rang dans les calculs.

* En effet : $\swarrow$ somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$
Si $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$
 $S' = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$: $S' = S - u_0 \neq S$
 $\uparrow$ somme de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ (= troncature de $\sum_{n \geq 0} u_n$)

Exemple 2

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)}$$

(T₁) On remarque que :

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1+n-n}{n(n+1)} \\ &= \frac{(1+n) - n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{1+n}}{n\cancel{(n+1)}} - \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = u_n$$

je calcule les sommes partielles :

$$\forall n \geq 2 \quad S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$= \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

~~lim~~
~~n → +∞~~

$$\text{Comme } \frac{1}{n+1} = o(1) \text{ , } S_n = \frac{1}{2} + o(1) \text{ n} \rightarrow +\infty$$

Par définition $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa

somme vaut $\frac{1}{2}$.

Bref rappel sur la notation $o(1)_{n \rightarrow +\infty}$

- Se manipule dans les calculs (donc opérationnel)
- $o(1)_{n \rightarrow +\infty}$ veut dire : une suite convergente de limite nulle.

- La somme de deux suites qui tendent vers 0 est une suite qui tend vers 0 :

$$o(1) + o(1) = o(1)_{n \rightarrow +\infty}$$

(ou $o(1) + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$)

- L'inverse d'une suite qui tend vers 1 tend vers 1

$$\frac{1}{1 + o(1)} = 1 + o(1)_{n \rightarrow +\infty}$$

↑
petit o de 1

- Traduire en français

$$(1 + o(1)) \times (1 + o(1)) = 1 + o(1)_{n \rightarrow +\infty}$$

→ rephraser en relisant le cours

T₂

Calcul de somme d'une série tronquée

En général une série est *distincte* de sa troncature.

1. P.ex, Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 2} u_n$ sont distinctes.

a) Toutefois, il existe un lien entre leurs sommes partielles respectives $(S_n)_{n \geq 0}$ et $(S'_n)_{n \geq 2}$. En effet :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad S_n &= u_0 + \cdots + u_n \quad (\text{par déf.}) \\ &= u_0 + u_1 + \underbrace{u_2 + \cdots + u_n}_{\text{présent car } n \geq 2} \\ &= u_0 + u_1 + S'_n \end{aligned}$$

b) Les sommes de ces séries sont donc en général distinctes car :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \stackrel{1.a)}{=} (u_0 + u_1) + \sum_{n=2}^{\infty} u_n$$

2. **Attention.** Ne pas confondre, troncature $\neq$ *changement* d'indice. P.ex :

$$\underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}}_{\text{ma série}} \neq \underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!}}_{\text{troncature de ma série}} \quad \text{mais} \quad \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}}_{\text{ma série}} \stackrel{\substack{\text{glissement} \\ \text{d'indice}}}{=} \underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!}}_{\text{c'est encore ma série}}$$

deux séries différentes *même série*

D) Structure vectorielle de l'ensemble des séries

■ **Définition 5** [Combinaison linéaire de séries]

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont deux séries et a, b deux scalaires on définit la série notée $a \sum_{n \geq n_0} u_n + b \sum_{n \geq n_0} v_n$ comme la série $\sum_{n \geq n_0} (au_n + bv_n)$.

■ **Proposition 3** [structure vectorielle]

Soit $n_0 \geq 0$ un entier fixé.

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ des séries numériques de rang initial n_0 est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.
2. Le sous-ensemble $\mathcal{S}_*$ des séries convergentes de $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

■ **Remarque 2.**

La somme d'une série convergente définit sur $\mathcal{S}_*$ une application linéaire, puisque si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont dans $\mathcal{S}_0$, alors :

$$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2 \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (au_k + bv_k) = a \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + b \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$$

*La somme de la C.L. est la C.L. des sommes
le t.g. de la C.L. est la C.L. des t.g.*

E) Séries de références

Servent tout le temps dans les exercices

■ Théorème 1 [Convergence des séries géométriques]

1. La série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge **si et seulement si** $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$



Il en est de même pour la série de t.g. q^{k+1} , (ou q^{k+2} etc).

2. Les séries géométriques dérivées $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (1)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}. \quad (2)$$

sent
aux
calculs
d'espérance
et de variance

■ Remarque 3.

Ne pas confondre :



- Suite géométrique : $\rightarrow$ type suite
- Série géométrique : $\rightarrow$ type série
- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique : $\rightarrow$ type nul (ou complexe)
- Somme d'une série géométrique : $\rightarrow$ type nul

T₃

Calcul de la somme d'une série géométrique tronquée

1. On écrit la somme sous forme développée :

$$S = \sum_{k=p}^{+\infty} q^{k-k_0} = q^{p-k_0} + q^{p+1-k_0} + \dots$$

2. a) Si le premier terme de la somme ainsi développée vaut 1 : on a la somme **complète** d'une série géométrique et $S = \frac{1}{1-q}$.

- b) Sinon on factorise le premier terme de S pour se ramener au cas 2. a) :

$$S = q^{p-k_0} \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots)}_{\text{somme complète d'une série géométrique}} = q^{p-k_0} \times \frac{1}{1-q}.$$

■ Exemple 4.

Calculer $S = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Rem : la série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{2^{n+1}}$ converge

car c'est une série géométrique tronquée de raison $q = 1/2$.

Lycée Chateaubriand, Rennes
Classe de B₂^B 2026-2027
MY Patel © 1 3 2

Comme $|q| < 1$ et que la nature d'une série est invariante par troncature, $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{2^{n+1}}$ converge
prop. 2.

Calcul de la somme : (T₃)

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

$$\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}}$$

$$\stackrel{(T_3)}{=} \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2^4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\stackrel{\text{thm 1.10}}{=} \frac{1}{2^4} \times \left(\frac{1}{1 - 1/2} \right)$$

$$= \frac{1}{2^4} \times 2 = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Exemple 3' nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^{k-1}}$

(illustre
thm 1)

et calcul de la somme le cas échéant.

On reconnait le t.g d'une série géométrique

dérivée de raison $q = \frac{1}{2}$. Comme $|q| < 1$,

elle converge et sa somme vaut :

(thm 1.2)
$$\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 4$$

■ Définition 6 [Séries exponentielles]

Ce sont les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

■ Théorème 2 [Convergence des séries exponentielles]

Pour tout réel x , la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ converge et : $0^0 = 1$ $0^0 = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \text{ En particulier } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

($x=1$) ($x=-1$)

■ Définition 7 [Série harmonique]

C'est la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

■ Théorème 3 [Séries zêta]

1. La série harmonique diverge vers $+\infty$. Il en est de même pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ (Prop. 2).
2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Il en est de même pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^2}$ (Prop. 2).

■ Exemple 5.

Nature la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$, et calcul de la somme le cas échéant.

2 Étude de la convergence des séries

A) Condition nécessaire de convergence

■ Proposition 4 [Condition nécessaire de convergence d'une série]

Pour qu'une série soit convergente, il faut que son terme général converge vers 0. La réciproque est fausse (ça ne suffit pas!).

■ Exemple 6.

🦋 Le t.g. de la série harmonique converge vers 0, mais la série harmonique diverge (Thm. 3)

■ Définition 8 [série grossièrement divergente]

Série dont le terme général ne tend pas vers 0. Elle est divergente par contraposition de la prop. 4.

B) Condition suffisante de convergence

■ Définition 9 [Absolue convergence]

La série $\sum_{k \geq n_0} u_k$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{k \geq n_0} |u_k|$ est convergente.

■ Théorème 4 [Cond. suffisante de convergence]

Si une série converge absolument, alors elle converge. La réciproque est fausse.

■ Remarque 4.

Ceci incite à porter une attention particulière à l'étude des séries à termes positifs.

Exemple : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas
absolument convergente.

En effet si on note $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ le t.g.

de la série, $|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$

donc $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ diverge car c'est la série
harmonique.

Conclusion :

$\sum_{n \geq 1} u_n$ n'est pas absolument
convergente

Rem: Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série à termes ≥ 0 ,

$|u_n| = u_n$, donc pour ce type de séries:

convergence et convergence absolue sont
synonymes.

important
à comprendre
logique
de base

• Commentaire sur prop 4.

Elle dit

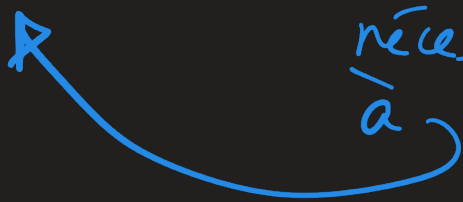
$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

converge

$\Rightarrow$

$$u_n \rightarrow 0$$

nécessaire
à



$$x > 170 \Rightarrow x > 150$$

$$P \Rightarrow Q$$

Q est nécessaire
à P
 P est suffisant pour Q

• L'exemple 6 prouve que la condition : $u_n \rightarrow 0$
n'est pas suffisante pour que $\sum u_n$ converge.

Exemple 5
Nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$

idée } $\rightarrow$ je vais "neutraliser les n^2 au numérateur"

Nature:

Partons de :

$$\forall n \geq 0 \quad n(n-1) = n^2 - n$$

donc : $n^2 = n(n-1) + n$

Divisons par $n! \neq 0$:

$$\forall n \geq 0 \quad \frac{n^2}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!}$$

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times \dots \times n \\ &= (n-1)! \times n \\ &= (n-2)! (n-1)n \end{aligned}$$

$$(*) \quad \forall n \geq 2 \quad \frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \quad \triangle \text{ (division par zéro)}$$

Le terme général $\frac{n^2}{n!}$ est combinaison linéaire de termes généraux de séries exponentielles

Par C.L. la série $\sum_{n \geq 2} \frac{n^2}{n!}$ converge.

Par propriété de la troncature, $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$ aussi.

• calcul de la somme.

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \right)$$

$$\stackrel{\text{linéarité}}{=} \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}}_{\text{jaune}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}}_{\text{rouge}}$$

$$= \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots \right) + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \right)$$

$$= e + e - 1$$

$$S = 2e - 1$$

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \frac{0^2}{0!} + \frac{1^2}{1!} + S = 0 + 1 + S,$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e}$$

Exo 2 TD

1 -

2 -

3 - Plus technique : écrire le t.g. comme
CL. de t.g. de séries convergentes.
exemple 5.

~ classique concours

^k
c'est aussi la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

■ Exemple 7.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente mais non absolument convergente.
 $u_n \quad |u_n| = \frac{1}{n}$

3 Méthodes d'étude des séries à termes positifs

A) Convergence monotone

(se fait relativement peu)

■ **Théorème 5** [Cv monot. pour les séries à termes positifs]

Si la série $\sum_k u_k$ est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite des **sommes partielles** est majorée. Sinon, la série diverge vers $+\infty$.

B) Équivalents

■ **Théorème 6** [équivalents pour les séries à termes positifs]

Deux séries à termes positifs de termes généraux équivalents sont de même nature.

se fait très souvent

🦋 On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux**, pas les séries, ni les sommes partielles.

■ Exemple 8.

Montrer que la série de terme général $u_k = \ln\left(1 + \frac{1}{4k^2}\right)$ converge.

C) Théorème de comparaison

■ **Théorème 7** [Critère de comparaison des séries à termes positifs (C.C.S.A.T.P.)]

Si à partir d'un certain rang p (souvent $p = 1, 2$) : $0 \leq u_k \leq v_k$ alors :

1. si la série $\sum_k v_k$ converge, la série $\sum_k u_k$ aussi. Dans ce cas, on a de plus la relation suivante sur

les sommes des séries : $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=p}^{+\infty} v_k$

2. si la série $\sum_k u_k$ diverge, la série $\sum_k v_k$ aussi.

🦋 On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux**, pas les séries, ni les sommes partielles.

■ Exemple 9.

1. a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2. Étudier la nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{1/3}}$.

Exemple d'utilisation du thm 7

Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{4}{(2n+3)(2n+1)}$ (TD)

On remarque que :

$$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq u_n = \frac{4}{(2n+3)(2n+1)} \leq \frac{4}{2n \cdot 2n} \text{ car } n > 0$$

majorer
 $\frac{A}{B}$ ($A, B \geq 0$)
 - on majore A
 - on minimise B

$$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq u_n \leq \frac{4}{4n^2} = \frac{1}{n^2}$$

D'après le CCSTP re pas l'évaluer

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge,

$$\left| \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge} \right|$$

(cette méthode ne permet pas de calculer la somme)

Exemple 9 (plus élaboré).

1. (classique) :

$$1a) \quad \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} \times \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{1 \leftarrow a^2 - b^2}$$

1b) Nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$

je dois utiliser 1a) (mais le CCSTP

donnerait la réponse avec $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} \geq 0$)

$\forall k \geq 1$:

$$0 \leq \sqrt{k} + \sqrt{k} \leq \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$$

Donc :

$$\forall k \geq 1 \quad \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Ainsi : $\forall k \geq 1 \quad \frac{1}{2\sqrt{k}} \stackrel{1.a)}{\geq} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \quad (*)$

Ceci me permet de minorer les sommes partielles S_n de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$:

je fixe $n \geq 1$ et je somme toutes

les inégalités $(*)$ de $k=1$ à $k=n$:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$\frac{1}{2} S_n \geq \sqrt{n+1} - 1 \text{ par télescopage}$$

$$\text{D'où } \boxed{S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2 \quad \forall n \geq 1}$$

D'après le théorème de minoration sur les suites,

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \text{ car } 2\sqrt{n+1} - 2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

preuve de thm 5.

Par def: $\sum_k u_k$ ^(A) converge $\Leftrightarrow$ la suite (S_n) de ses ^(B) sommes partielles converge.

je montre que (S_n) est croissante:

Or: $S_{n+1} - S_n \stackrel{\text{prop. 1}}{=} u_{n+1} \geq 0$ car (u_n) est à termes positifs.

Conclusion: d'après le théorème de convergence monotone, (S_n) converge $\Leftrightarrow (S_n)$ est majorée.

(B)

donc

$(A) \Leftrightarrow (C)$



Solution exemple 8:

Posons $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)$ ($n \geq 1$).

Comme $n \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{4n^2} = o(1)$.

D'après les équivalents usuels:

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

$\ln(1+u) \sim u$
 $u \rightarrow 0$

Comme $\frac{1}{4n^2}$ est C.L. du t.g d'une

série de référence convergente $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$,

et que $\frac{1}{4n^2} \geq 0$, d'après le théorème sur les équivalents de séries à termes positifs,

on déduit que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge

série harmonique alternée

Exemple 7.

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \text{ convergence}$$

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\ S_2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ S_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Je montre que la suite des sommes partielles

diverge. Pour cela, j'introduis $t \in [0, 1]$

et je calcule:

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} \text{ car } t \neq -1$$

$$\text{Ainsi } \forall t \in [0, 1] \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$$

On intègre de 0 à 1:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = B$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = B$$

$$\int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$$

Si je note (S_n) la suite des sommes partielles:

$$\forall n \geq 0 \quad S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

$$S_n = \left[\ln |1+t| \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

primitivation à me (val. abs. obligatoire)

$$\forall n \geq 0 \quad S_n = \ln 2 + (-1)^n R_n$$

$$\text{où } R_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

J'ai l'intuition que $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Je le prouve:

$$\forall n \geq 0, \forall t \in [0, 1] \quad t^{n+1} \geq \frac{t^{n+1}}{1+t} \geq 0$$

classe Agre.

donc

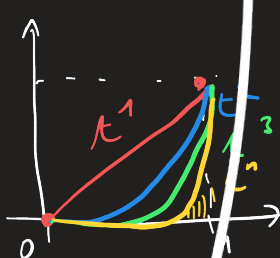
$$\int_0^1 t^{n+1} dt \geq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \geq 0$$

$$\frac{1}{n+2} \geq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \geq 0$$

croissance de l'intégrale

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'après le théorème des gendarmes.



← explication

$$\int_0^1 t^n dt \rightarrow 0$$

T₄

Comment étudier la nature d'une série ?

1. Si le t.g. ne tend pas vers 0 : **grossière divergence**. Fin.
2. Sinon : **reconnaître** :
 - a) le t.g. d'une série de référence ou une combinaison linéaire de t.g. de séries de nature connue.
 - b) sinon : le moment d'une variable aléatoire discrète.
 - c) sinon : une série télescopique,
3. Sinon : **calculer** les sommes partielles S_n si ce sont des sommes qu'on sait calculer (par **T0**), et étudier la nature de la suite (S_n) .
4. Sinon : examiner le **signe du t.g.** :
 - a) Si le terme général de la série est positif :
 - i) chercher un équivalent du t.g. et utiliser les séries de référence.
 - ii) sinon, utiliser le CCSATP sur le t.g..
 - b) Sinon : étudier l'absolue convergence de la série pour se ramener à un t.g. positif.

Remarques universelles et vitales sur l'étude des séries :

1.  On travaille **toujours** sur le t.g. (sauf situation **3.**)
2. Dans les études de nature, ou calculs de sommes, on ne manipule **jamais la série elle-même**.
3. On n'introduit jamais **la somme** d'une série avant d'avoir prouvé sa convergence. Il est obligatoire d'abord de la prouver par les méthodes **1-4** listées ci-dessus.

T₅

Comment calculer la somme d'une série ?

Si vous en êtes à cette, étape, c'est que vous avez **obligatoirement** établi la convergence de la série par **T4**

1. Reconnaître le moment d'une variable aléatoire discrète (et appliquer éventuellement la formule de Koenig).

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}.$$

2. Calcul explicite des sommes partielles si ce sont des sommes usuelles, notamment **T1**. Attention aux tronca-tures **T2**.
3. Écrire le t.g. comme CL de t.g. de séries de sommes connues.

$$(n^2 + n)x^{2n} \stackrel{q=x^2}{=} n^2 + n = n^2 - n + 2n = n(n-1) + 2n \quad n(n-1)q^n + 2nq^n$$

$$\stackrel{q^2 n(n-1)q^{n-2} + 2q nq^{n-1}}{=} \underbrace{q^2 n(n-1)q^{n-2}}_{\text{connu}} + \underbrace{2q nq^{n-1}}_{\text{connu}}$$

T₆

Comparaison avec une intégrale pour l'étude de $\sum_{n \geq p} f(n)$

Si f est une fonction *décroissante positive*, pour prouver la convergence de $\sum_{n \geq p} f(n)$:

1. On fixe un rang $k \geq p$, et par décroissance de f :
 $\forall t \in [k-1, k] \quad 0 \leq f(k) \leq f(t)$.
2. Donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall k \geq p \quad 0 \leq u_k \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

3. Enfin, en sommant les inégalités précédentes de $k = p$ à $k = n$ ($n \geq p$ étant entier fixé), par relation de Chasles :

$$\forall n \geq p \quad 0 \leq S_n \leq \int_{p-1}^n f(t) dt.$$

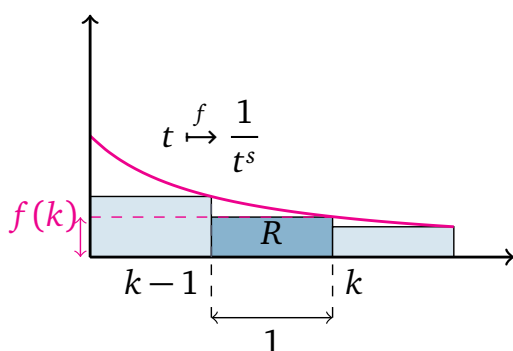
4. Si on sait majorer cette dernière intégrale par un réel *in-dépendant de n* , cela établit la convergence de la série.

Rem. On peut aussi établir la **divergence** de la série en **minorant** les sommes partielles par une intégrale tendant vers $+\infty$ avec n .

Hors-programme
 Tout énoncé sur
 cette technique
 doit vous guider
 p.ex DM 1

Exemple 10.

Convergence de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ pour $s > 1$.



1. Par décroissance sur $\mathbf{R}_+^*$ de $t \mapsto \frac{1}{t^s}$:

$$\forall k \geq 2 \quad \forall t \in [k-1, k] \quad 0 \leq \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{t^s}$$

2. puis par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{k^s}}_{\text{Aire du rectangle } R=1 \times f(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^s}$$

3. et enfin par sommation de $k = 2$ à $k = n$ et par la relation de Chasles :

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^s}. \text{ D'où par primitivation :}$$

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{n^{s-1}} \right) \leq \frac{1}{s-1}.$$

4. Les sommes partielles de la série sont majorées par $1/(s-1)$.
 Comme la série est à termes positifs, elle converge.