

Thèmes : Séries numériques - bases de programmation

À connaître

Chapitre utilitariste étudié en prérequis du calcul des probabilités. La théorie générale des séries n'est pas un objectif en soi.

- Notation $\sum_{n \geq p} u_n$ d'une série, $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ pour la somme de la série, sommes partielles.
- Troncatures d'une série. Une série et ses troncatures sont de même nature.
- Structure d'espace vectoriel, et linéarité de la somme.
- Séries de référence : série harmonique, série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, séries géométriques et séries dérivées première, seconde, séries exponentielles.
- Condition nécessaire de convergence sur le terme général. Divergence grossière.
- Convergence absolue. Pas de semi-convergence (hors-programme).
- Séries à termes positifs : critère de convergence sur les sommes partielles, critère de comparaison des séries à termes positifs (si $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n \geq p} v_n$ converge (resp. $\sum_{n \geq p} u_n$ diverge), il en est de même pour $\sum_{n \geq p} u_n$ (resp. $\sum_{n \geq p} v_n$)).

1 – Remédiation des erreurs en WS

Aussi longtemps que nécessaire

2 – Vérification de colle sur les techniques de base (VC)

liste des questions à poser

1. Soit la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Donner sous forme développée (sans Σ et avec points de suspensions) les sommes partielles S_{2n} , S_{2n+1} , et $\sum_{k=0}^n u_{2k}$.
2. Soit $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$.
3. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ ($n \geq 1$) converge en calculant les sommes partielles.

4. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ ($n \geq 1$) converge avec le critère de comparaison des séries.
5. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ ($n \geq 1$) converge avec la méthode des équivalents.
6. Justifier que la série de terme général $(-1)^n$ diverge sans calculs.
7. En calculant les sommes partielles, étudier la nature de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$.
8. Soit p, q deux réels tels que $0 < p, q < 1$ et $p + q = 1$. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} pq^{n-1} + qp^{n-1}$ et calcul de la somme le cas échéant.
9. Exemple de série convergente mais non absolument convergente.
10. Soit $n \geq 0$ un entier. Exprimer $\frac{n^2}{n!}$ Comme combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes (quantification requise)
11. Justifier pour tout réel x la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 1}{n!} x^n$ et calcul de la somme.
12. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$ après avoir justifié la convergence.
13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{1+t}$
14. Étudier la limite de $R_n = \sum \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.
15. Soit x un réel. Condition sur x pour que la série de terme général $u_n = n(n+1)x^{2n}$ converge, et calcul de la somme le cas échéant.
16. Programmation de sommes partielles de séries et détermination du premier rang tel que $S_n \in I$.

3 – Exercice libre dans le temps restant