Programme de colles semaine 3 — Du 28/9 au 3/10

Thèmes : Séries et probabilités discrètes

À connaître

1. Révisions sur les séries.
2. Théorie basique des probabilités.
   (a) Pas de connaissances exigibles, ni exercices sur la notion de tribu.
   (b) Dictionnaire probabiliste-ensembliste.
   (c) Espace probabilisé.
   (d) Propriétés axiomatiques d'une mesure de probabilité, σ-additivité.
   (e) Notion de sysème quasi-complet d'évènements.
   (f) Probabilités conditionnelles, formules des probabilités composées/totales, formule de Bayes.
   (g) Notion d'indépendance.

1 – Remédiation des erreurs en WS

Aussi longtemps que nécessaire

2 – Vérification de colle sur les techniques de base (QC)

Liste des questions à poser

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On note pour tout entier naturel n, $S_n(x)$ la somme partielle d'ordre n de la série définissant e^x, et on note $u_n = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\quad v_n = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
   (a) Soit $a_n = u_n + v_n$ (resp. $b_n = u_n - v_n$). Exprimer les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$) à l'aide de $(S_n(x)$.
   (b) En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ et calculer leur somme.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$:
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:
$$1 + \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

3. Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
4. Soit $0 < p < 1$ un réel. On dispose d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p, et d'une infinité d'urnes $U_1, U_2, \ldots$.
   Pour tout entier $k > 0$, l'urne k contient exactement k boules dont une seule boule est blanche. Le jeu est le suivant : on lance la pièce jusqu'à obtenir face. Si le face est obtenu au lancer numéro j, on tire une boule au hasard dans U_j. Soit B l'évènement : « on a obtenu une boule blanche.» Calculer $P(B)$.
5. On considère une suite de lancers d'une même pièce équilibrée, dont les lancers sont supposés mutuellement indépendants, et on arrête les lancers dès que l'on obtient pile. On note pour tout entier $n \geq 1$ F_n :«Le n-ème lancer donne face», A_n : «Les n premiers lancers donnent face», et A : «on n'obtient jamais pile». Montrer que pour tout entier N, $P(A) \leq P(A_n)$. En déduire que A est quasi-impossible.
6. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirages successifs avec remise de la manière suivante : si la boule tirée est blanche, on arrête. Sinon on la remet, et on rajoute une boule noire de plus dans l'urne. On note B_n l'évènement « le n-ème tirage amène la boule blanche», $\beta_n = P(B_n)$, et J :« Le jeu s'arrête ». Montrer que la suite (β_n) converge vers 0.
7. Soit $N > 0$ un entier. On dispose de N urnes $U_1, \ldots, U_N$. Pour tout entier $j \in \{1 \ldots N\}$, l'urne j contient N boules, dont exactement j sont blanches. On choisit au hasard une urne, puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Soit B_N l'évènement : « on a obtenu une boule blanche.» Calculer $P(B_N)$. Étudier la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$.
8. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire successivement une boule avec remise et on ajoute après chaque tirage une boule noire dans l'urne. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la probabilité que la première boule noire tirée apparaisse au n-ème tirage.

3 – Exercice libre dans le temps restant

Ce sera l'occasion de tester la maîtrise, sur des situations élémentaires de tester :

1. la traduction en termes mathématiques d'évènements posés en français (exemple : «le premier face a eu lieu au rang n»), et plus généralement, le calcul d'évènements ;
2. l'application de la formule des probabilités composées ;
3. l'application de la formule des probabilités totales.