# Liste des questions Interrogations et Questions classiques colle 2

pour l'échange avec le candidat

## Questions issues de WS0

**1.** Corriger : comme $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, par combinaison linéaire, la série converge. ([WS0-Q1])

Réponse : Comme $\forall n\geq 1,\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-3\cdot\frac{1}{n^2}$, le t.g. est C.L de t.g de séries convergentes, la série converge.

**2.** Est-ce que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est absolument convergente ? Pourquoi ? ([WS0-Q2])

Réponse : Non, car la série $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$ est la série harmonique, qui n'est pas convergente.

**3.** Donner une condition nécessaire (mais pas suffisante) de convergence d'une série. ([WS0-Q3])

Réponse : Son terme général tend vers 0.

**4.** Donner une condition suffisante de convergence pour une série $\sum_{n\geq 1}u_n$ donnée. ([WS0-Q4])

Réponse : Le t.g. $u_n$ tend vers 0

**5.** Si $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge et que $u_n\underset{n\to\infty}{\sim}v_n$, est-ce que $\sum_{n\geq 1}v_n$ converge ? ([WS0-Q5])

Réponse : Si $u_n\geq 0$, oui. Sinon, on ne peut rien dire.

**6.** Calculer $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$ ([WS0-Q6])

Réponse : $1-\frac{1}{2^n}$

**7.** Calculer $\sum_{k=2}^{n}2^k$ ([WS0-Q7])

Réponse : $4\left(2^{n-1}-1\right)$

**8.** Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}$ ([WS0-Q8])

Réponse : $\frac{2}{3}$

**9.** Script d'une fonction `double(x)` qui prend un flottant `x` en entrée et renvoie en sortie le double de `x`. ([WS0-Q9])

Réponse :
```
def double(x):
    return 2*x
```

**10.** Combien de termes dans séquence générée par `range(1,10)` ? ([WS0-Q10])

Réponse : $10-1=9$

**11.** Script d'une fonction `somme(n)` qui prend un entier `n` en entrée et renvoie en sortie la valeur de $\sum_{k=1}^{n}k$. ([WS0-Q11])

Réponse :
```
def somme(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S+=1/k
    return S
```

## Questions issues de WS01

**12.** Définir mathématiquement l'ensemble $E$ des 3-listes à valeurs dans $\{\pi,1,0\}$. ([WS01-Q1])

Réponse : $E=\{0,1,\pi\}^3$

**13.** Donner deux éléments distincts cet ensemble $E$. ([WS01-Q2])

Réponse : Par exemple : $a=(0,0,0)$ et $b=(1,1,1)$.

**14.** Décrire en français l'ensemble $F=\{u\in E\ \mid\ u_1=\pi\}$, où $E$ est l'ensemble des 3-listes défini précédemment. ([WS01-Q3])

Réponse : $F$ est le sous-ensemble de $E$ constitué des suites dont le premier terme vaut $\pi$.

**15.** Donner un élément $u$ de $F$ et un élément $v$ de $E\setminus F$ de votre choix. ([WS01-Q4])

Réponse : Par exemple $u=(\pi,1,0)$, $v=(0,0,0)$

**16.** Un évènement est un objet de type ... ([WS01-Q5])

Réponse : Ensemble

**17.** Une famille est un objet de type ... ([WS01-Q6])

Réponse : liste (le point de vue fonction n'est pas un attendu)

**18.** Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $\Omega$. Corriger : «$\bar{A}=1-A$» ([WS01-Q7])

Réponse : $\bar{A}=\Omega\setminus A$

**19.** Écrire en langage mathématique, $\Omega$ étant l'univers associé à une expérience aléatoire, et $\mathscr{T}$ la tribu des évènements : «$A$ est un évènement.» ([WS01-Q8])

Réponse : $A\in\mathscr{T}$ ($A\subset\Omega$ accepté)

**20.** Définition de $(E_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements de $\Omega$. ([WS01-Q9])

Réponse : $\bigcup_{i\in I}E_i=\Omega$ et $i\neq j\Rightarrow E_i\cap E_j=\varnothing$

**21.** Énoncer la propriété de $\sigma$-additivité d'une fonction de probabilité ([WS01-Q10])

**22.** On note $F_k$ : «Le lancer n°$k$ donne face». Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Écrire avec les $F_k$ : «Le premier face a eu lieu au lancer $n$» ([WS01-Q11])

Réponse : $\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\overline{F_k}\right)\cap F_n$

**23.** On note $F_k$ : «Le lancer n°$k$ donne face». Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Écrire avec les $F_k$ : Obtenir un face au premier lancer implique d'obtenir face au moins une fois sur les $n$ premiers lancers ([WS01-Q12])

Réponse : $F_1\subset\bigcup_{k=1}^{n}F_k$

**24.** On note $F_k$ : «Le lancer n°$k$ donne face». Écrire avec les $F_k$ l'évènement $D$ : le deuxième face a lieu au 3ème lancer. ([WS01-Q13])

Réponse : $D=\left(F_1\cap\overline{F_2}\cap F_3\right)\cup\left(\overline{F_1}\cap F_2\cap F_3\right)$

## Questions classiques (QC)

**25.** Soit $x\in\mathbf{R}$. On note pour tout entier naturel $n$, $S_n(x)$ la somme partielle d'ordre $n$ de la série définissant $e^x$, et on note $u_n=\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\quad v_n=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Soit $a_n=u_n+v_n$ (resp. $b_n=u_n-v_n$). Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0}a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0}b_n$) à l'aide de $(S_n(x)$.
2. En déduire la nature des séries $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$ et calculer leur somme.

([Q000468])

**26.**

1. Montrer que pour tout entier naturel $k\geq 2$ :
$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\frac{1}{k}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
2. En déduire que pour tout entier $n\geq 1$ :
$$1+\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq 1+\int_1^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

([Q000469])

**27.** Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. ([Q000470])

**28.** Soit $0 < p < 1$ un réel. On dispose d'une pièce qui fait pile avec la probabilité $p$, et d'une infinité d'urnes $U_1, U_2, \ldots$.
Pour tout entier $k > 0$, l'urne $k$ contient exactement $k$ boules dont une seule boule est blanche. Le jeu est le suivant : on lance la pièce jusqu'à obtenir face. Si le face est obtenu au lancer numéro $j$, on tire une boule au hasard dans $U_j$. Soit $B$ l'évènement : « on a obtenu une boule blanche.» Calculer $P(B)$. ([Q000472])

**29.** On considère une suite de lancers d'une même pièce équilibrée, dont les lancers sont supposés mutuellement indépendants, et on arrête les lancers dès que l'on obtient pile. On note pour tout entier $n \geq 1$ $F_n$ :«Le $n$-ème lancer donne face», $A_n$ : «Les $n$ premiers lancers donnent face», et $A$ : «on n'obtient jamais pile». Montrer que pour tout entier $N$, $P(A) \leq P(A_n)$. En déduire que $A$ est quasi-impossible. ([Q000473])

**30.** Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirages successifs avec remise de la manière suivante : si la boule tirée est blanche, on arrête. Sinon on la remet, et on rajoute une boule noire de plus dans l'urne. On note $B_n$ l'évènement « le $n$-ème tirage amène la boule blanche», $\beta_n = P(B_n)$, et $J$ :« Le jeu s'arrête ». Montrer que la suite $(\beta_n)$ converge vers 0. ([Q000474])

**31.** Soit $N > 0$ un entier. On dispose de $N$ urnes $U_1, \ldots, U_N$. Pour tout entier $j \in \{1 \ldots N\}$, l'urne $j$ contient $N$ boules, dont exactement $j$ sont blanches. On choisit au hasard une urne, puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Soit $B_N$ l'évènement : « on a obtenu une boule blanche.» Calculer $P(B_N)$. Étudier la limite de cette probabilité lorsque $N$ tend vers $+\infty$. ([Q000484])

**32.** Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire successivement une boule avec remise et on ajoute après chaque tirage une boule noire dans l'urne. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la probabilité que la première boule noire tirée apparaisse au $n$-ème tirage. ([Q000485])