Liste des questions Interrogations et Questions classiques colle 3

pour l'échange avec le candidat

Les QC marquées d'une étoile sont obligatoirement posées en colle.

Questions issues de WS01

1. Définir mathématiquement l'ensemble E des 3-listes à valeurs dans $\{\pi, 1, 0\}$. ([WS01-Q1])

Réponse : $E = \{0, 1, \pi\}^3$

2. Donner deux éléments distincts cet ensemble E. ([WS01-Q2])

Réponse : Par exemple : $a = (0,0,0)$ et $b = (1,1,1)$.

3. Décrire en français l'ensemble $F = \{u \in E \quad | \quad u_1 = \pi\}$, où E est l'ensemble des 3-listes défini précédemment. ([WS01-Q3])

Réponse : F est le sous-ensemble de E constitué des suites dont le premier terme vaut π.

4. Donner un élément u de F et un élément v de $E \setminus F$ de votre choix. ([WS01-Q4])

Réponse : Par exemple $u = (\pi, 1, 0)$, $v = (0,0,0)$

5. Un évènement est un objet de type ... ([WS01-Q5])

Réponse : Ensemble

6. Une famille est un objet de type ... ([WS01-Q6])

Réponse : liste (le point de vue fonction n'est pas un attendu)

7. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble Ω. Corriger : «$\bar{A} = 1 - A$» ([WS01-Q7])

Réponse : $\bar{A} = \Omega \setminus A$

8. Écrire en langage mathématique, Ω étant l'univers associé à une expérience aléatoire, et $\mathscr{T}$ la tribu des évènements : «A est un évènement.» ([WS01-Q8])

Réponse : $A \in \mathscr{T}$ ($A \subset \Omega$ accepté)

9. Définition de $(E_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements de Ω. ([WS01-Q9])

Réponse : $\bigcup_{i\in I} E_i = \Omega$ et $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$

10. Énoncer la propriété de σ-additivité d'une fonction de probabilité ([WS01-Q10])

11. On note F_k : «Le lancer n°k donne face». Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Écrire avec les F_k : «Le premier face a eu lieu au lancer n» ([WS01-Q11])

Réponse : $\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{F_k}\right) \cap F_n$

12. On note F_k : «Le lancer n°k donne face». Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Écrire avec les F_k : Obtenir un face au premier lancer implique d'obtenir face au moins une fois sur les n premiers lancers ([WS01-Q12])

Réponse : $F_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} F_k$

13. On note F_k : «Le lancer n°k donne face». Écrire avec les F_k l'évènement D : le deuxième face a lieu au 3ème lancer. ([WS01-Q13])

Réponse : $D = \left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3\right) \cup \left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3\right)$

Questions issues de WS02

14. Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé,et $\omega \in \Omega$. Corriger : « $P(\omega) \geq 0$». ([WS02-Q1])

Réponse : « $P(\{\omega\}) \geq 0$».

15. Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé, $\omega \in \Omega$ et $A \in \mathscr{T}$. Traduire en français : « $\omega \in A$» ([WS02-Q2])

Réponse : L'observation ω est une réalisation de l'évènement A.

16. Définition d'évènement impossible ? ([WS02-Q3])

Réponse : $\varnothing$

17. Définition d'évènement quasi-impossible. ([WS02-Q4])

Réponse : Événement de probabilité nulle

18. Combien d'évènement quasi-impossibles ? ([WS02-Q5])

Réponse : Une infinité

19. Combien d'évènements impossibles ? ([WS02-Q6])

Réponse : un seul.

20. Convertir en inégalités en valeurs absolues $x \in [-1, 1]$ ([WS02-Q7])

Réponse : $|x| \leq 1$

21. Convertir en inégalités en valeurs absolues $x \in]1, 3[$ ([WS02-Q8])

Réponse : $|x - 2| < 1$

22. Combien de termes dans `L[2:8]` ? ([WS02-Q9])

Réponse : 6

23. Quelle instruction pour extraire de `L` ses 4 premiers termes ? ([WS02-Q10])

Réponse : `L[:4]`

24. Compléter pour avoir 11 termes affichés en exécutant :

```
for n in range(15,...):
    print(n)
```

([WS02-Q11])

Réponse : `range(15,26)`

25. Combien de termes dans `L` à la fin ?

```
L=[u]
for _ in range(n):
    L.append(f(u))
...
```

([WS02-Q12])

Réponse : `n+1` items

26. Quelle commande pour ajouter à la liste `L` un item `a` ? ([WS02-Q13])

Réponse : `L.append(a)` ou `L+=[a]`

27. Quelle commande pour ajouter à la liste `L` l'objet `[a]` ? ([WS02-Q14])

Réponse : `L+=[[a]]` ou `L.append([a])`

28. Quelle commande pour concaténer à la liste `L1` la liste `L2` ? ([WS02-Q15])

Réponse : `L1+L2`

29. Données : $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite récurrente donnée par $u_1 = 2$, et pour $n \geq 1$: $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Compléter le script pour qu'il affiche la valeur de u_{10}:

```
u=2
for _ in range(...):
    ...
print(u)
```

([WS02-Q16])

Réponse :

```
for _ in range(9):
    u = 1+u**2
```

Questions classiques (QC)

30. Soit $x \in \mathbf{R}$. On note pour tout entier naturel n, $S_n(x)$ la somme partielle d'ordre n de la série définissant e^x, et on note $u_n = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\quad v_n = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Soit $a_n = u_n + v_n$ (resp. $b_n = u_n - v_n$). Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} b_n$) à l'aide de $(S_n(x)$.
2. En déduire la nature des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ et calculer leur somme.

([Q000468])

31. Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. ([Q000470])

32⋆. Soit $0 < p < 1$ un réel. On dispose d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p, et d'une infinité d'urnes $U_1, U_2, \ldots$. Pour tout entier $k > 0$, l'urne k contient exactement k boules dont une seule boule est blanche. Le jeu est le suivant : on lance la pièce jusqu'à obtenir face. Si le face est obtenu au lancer numéro j, on tire une boule au hasard dans U_j. Soit B l'évènement : « on a obtenu une boule blanche.» Calculer $P(B)$. ([Q000472])

33. On considère une suite de lancers d'une même pièce équilibrée, dont les lancers sont supposés mutuellement indépendants, et on arrête les lancers dès que l'on obtient pile. On note pour tout entier $n \geq 1$ F_n :«Le n-ème lancer donne face», A_n : «Les n premiers lancers donnent face», et A : «on n'obtient jamais pile». Montrer que pour tout entier N, $P(A) \leq P(A_n)$. En déduire que A est quasi-impossible. ([Q000473])

34. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirages successifs avec remise de la manière suivante : si la boule tirée est blanche, on arrête. Sinon on la remet, et on rajoute une boule noire de plus dans l'urne. On note B_n l'évènement « le n-ème tirage amène la boule blanche», $\beta_n = P(B_n)$, et J :« Le jeu s'arrête ». Montrer que la suite (β_n) converge vers 0. ([Q000474])

35. Soit $N > 0$ un entier. On dispose de N urnes $U_1, \ldots, U_N$. Pour tout entier $j \in \{1 \ldots N\}$, l'urne j contient N boules, dont exactement j sont blanches. On choisit au hasard une urne, puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Soit B_N l'évènement : « on a obtenu une boule blanche.» Calculer $P(B_N)$. Étudier la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$. ([Q000484])

36⋆. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire successivement une boule avec remise et on ajoute après chaque tirage une boule noire dans l'urne. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer la probabilité que la première boule noire tirée apparaisse au n-ème tirage. ([Q000485])