

Thèmes :

Connaissances

1. Variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
2. Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire discrète.
3. Fonction de répartition : domaine de définition, monotonie, limites en l'infini.
4. Moments d'une VAR discrète.
5. Espérance. Propriétés fonctionnelles.
6. Variance. Propriétés fonctionnelles.
7. Théorème de transfert.
8. Formule de König-Huygens.
9. Variable aléatoire centrée, ou réduite. Variable X^* centrée réduite associée à la VAR X .
10. Lois usuelles :
 - (a) Loi certaine.
 - (b) Loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$. Espérance.
 - (c) Loi de Bernoulli, espérance, variance.
 - (d) Loi binomiale, espérance, variance.
 - (e) Loi géométrique, espérance, variance.
 - (f) Loi de Poisson, espérance, variance.

En plus des connaissances de bases (Définitions, propriétés, théorèmes, etc.), vous devez réussir à mobiliser les techniques listées dans le chapitre pour ne pas bloquer dans un exercice.

1 – Remédiation des erreurs en WS

Aussi longtemps que nécessaire

2 – Vérification de colle sur les techniques de base (QC)

Liste des questions à poser

1. Soit $0 < p < 1$ un réel. On dispose d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p , et d'une infinité d'urnes $U_1, U_2, \dots$.
Pour tout entier $k > 0$, l'urne k contient exactement k boules dont une seule boule est blanche. Le jeu est le suivant : on lance la pièce jusqu'à obtenir face. Si le face est obtenu au lancer numéro j , on tire une boule au hasard dans U_j . Soit B l'évènement : « on a obtenu une boule blanche. » Calculer $P(B)$.

2. On considère une suite de lancers d'une même pièce équilibrée, dont les lancers sont supposés mutuellement indépendants, et on arrête les lancers dès que l'on obtient pile. On note pour tout entier $n \geq 1$ F_n : «Le n -ème lancer donne face», A_n : «Les n premiers lancers donnent face», et A : «on n'obtient jamais pile». Montrer que pour tout entier N , $P(A) \leq P(A_N)$. En déduire que A est quasi-impossible.
3. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirages successifs avec remise de la manière suivante : si la boule tirée est blanche, on arrête. Sinon on la remet, et on rajoute une boule noire de plus dans l'urne. On note B_n l'évènement « le n -ème tirage amène la boule blanche », $\beta_n = P(B_n)$, et J : « Le jeu s'arrête ». Montrer que la suite (β_n) converge vers 0.
4. Soit $N > 0$ un entier. On dispose de N urnes $U_1, \dots, U_N$. Pour tout entier $j \in \{1 \dots N\}$, l'urne j contient N boules, dont exactement j sont blanches. On choisit au hasard une urne, puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Soit B_N l'évènement : « on a obtenu une boule blanche. » Calculer $P(B_N)$. Étudier la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$.
5. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire successivement une boule avec remise et on ajoute après chaque tirage une boule noire dans l'urne. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que la première boule noire tirée apparaisse au n -ème tirage.
6. On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués avant d'observer le 6. Calculer la loi de la variable X .
7. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On lance N fois un dé équilibré. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. Soit Y a variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus. Calculer la loi de la variable Y .
8. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi, et Z la variable définie par $Z = \max(X_1, X_2)$. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X_1 .

3 – Exercice libre dans le temps restant