

Liste des questions Interrogations et Questions classiques colle 4

pour l'échange avec le candidat

Les QC marquées d'une étoile sont obligatoirement posées en colle.

Questions issues de WS02

1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, et $\omega \in \Omega$. Corriger : « $P(\omega) \geq 0$ ». ([WS02-Q1])

Réponse : « $P(\{\omega\}) \geq 0$ ».

2. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, $\omega \in \Omega$ et $A \in \mathcal{T}$. Traduire en français : « $\omega \in A$ » ([WS02-Q2])

Réponse : L'observation ω est une réalisation de l'évènement A .

3. Définition d'évènement impossible ? ([WS02-Q3])

Réponse : $\emptyset$

4. Définition d'évènement quasi-impossible. ([WS02-Q4])

Réponse : Évènement de probabilité nulle

5. Combien d'évènement quasi-impossibles ? ([WS02-Q5])

Réponse : Une infinité

6. Combien d'évènements impossibles ? ([WS02-Q6])

Réponse : un seul.

7. Convertir en inégalités en valeurs absolues $x \in [-1, 1]$ ([WS02-Q7])

Réponse : $|x| \leq 1$

8. Convertir en inégalités en valeurs absolues $x \in]1, 3[$ ([WS02-Q8])

Réponse : $|x - 2| < 1$

9. Combien de termes dans $L[2:8]$? ([WS02-Q9])

Réponse : 6

10. Quelle instruction pour extraire de L ses 4 premiers termes ? ([WS02-Q10])

Réponse : $L[:4]$

11. Compléter pour avoir 11 termes affichés en exécutant :
for n in range(15,...):
 print(n) ([WS02-Q11])

Réponse : `range(15, 26)`

12. Combien de termes dans L à la fin ?
 $L=[u]$
for _ in range(n):
 L.append(f(u)) ([WS02-Q12])
...

Réponse : $n+1$ items

13. Quelle commande pour ajouter à la liste L un item a ? ([WS02-Q13])

Réponse : $L.append(a)$ ou $L+= [a]$

14. Quelle commande pour ajouter à la liste L l'objet $[a]$? ([WS02-Q14])

Réponse : $L+= [[a]]$ ou $L.append([a])$

15. Quelle commande pour concaténer à la liste $L1$ la liste $L2$? ([WS02-Q15])

Réponse : $L1+L2$

16. Données : $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite récurrente donnée par $u_1 = 2$, et pour $n \geq 1$: $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Compléter le script pour qu'il affiche la valeur de u_{10} :
 $u=2$
for _ in range(...): ([WS02-Q16])
 ...
print(u)

Réponse :
for _ in range(9):
 u = 1+u**2

Questions issues de WS03

17. Corriger la première partie pour que la phrase suivante soit exacte : « Comme (u_n) converge, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge. » ([WS03-Q1])

Réponse : Comme la suite (S_n) des sommes partielles converge ...

18. Soit X une variable aléatoire réelle et k un réel . Corriger : « $\overline{[X \leq k]} = 1 - [X \leq k]$ ». ([WS03-Q2])

Réponse : $\overline{[X \leq k]} = [X > k]$

19. Soit k et n deux entiers naturels non nuls. Corriger : « Comme $k \leq n$, on a alors : $1/k \geq 1/n$ ». ([WS03-Q3])

Réponse : Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, comme $k \leq n$, on a alors : $1/k \geq 1/n$.

20. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0$ ([WS03-Q4])

Réponse : $f(x) = 1 + o(1)$ $x \rightarrow 0$ ou $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

21. Soit X une VAR et t un réel. $[X > t] = 1 - \overline{[X < t]}$ ([WS03-Q5])

Réponse : $[X > t] = \overline{[X \leq t]}$

22. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 + o(1)$ ([WS03-Q6])

Réponse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

23. $u_n \sim 1 + o(1)$ $n \rightarrow \infty$ ([WS03-Q7])

Réponse : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$

24. Corriger : $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cap P_A(B) \cap P_{A \cap B}(C)$ ([WS03-Q8])

Réponse : $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$

25. Soit X une variable aléatoire d'espace image $\mathbb{N}^*$. Donner le S.Q.C.E. associé à X . ([WS03-Q9])

Réponse : $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$

26. Factoriser $48 - 3x^4$ ([WS03-Q10])

Réponse : $3(2 - x)(2 + x)(x^2 + 4)$

27. Simplifier : $\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$ ([WS03-Q11])

Réponse : $-\frac{1}{2^{n+1}}$

28. Quelle instruction pour stocker dans a, b, c les trois derniers éléments de la liste L ? ([WS03-Q12])

Réponse : $a, b, c = L[-3:]$

29. Sous-liste des 5 derniers termes de la liste L ([WS03-Q13])

Réponse : $L[-5:]$

30. Définir par une liste en compréhension la liste L des puissances de 2 de 2^0 à 2^{10} . ([WS03-Q14])

Réponse : $L = [2**k \text{ for } k \text{ in range}(11)]$

31. Définir par une liste en compréhension la liste L des puissances de 2 de 2^0 à 2^{10} en excluant 2^8 ([WS03-Q15])

Réponse : $L = [2**k \text{ for } k \text{ in range}(11) \text{ if } k != 8]$

Questions classiques (QC)

32. Soit $0 < p < 1$ un réel. On dispose d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p , et d'une infinité d'urnes $U_1, U_2, \dots$. Pour tout entier $k > 0$, l'urne k contient exactement k boules dont une seule boule est blanche. Le jeu est le suivant : on lance la pièce jusqu'à obtenir face. Si le face est obtenu au lancer numéro j , on tire une boule au hasard dans U_j . Soit B l'évènement : « on a obtenu une boule blanche. » Calculer $P(B)$. ([Q000472])

33. On considère une suite de lancers d'une même pièce équilibrée, dont les lancers sont supposés mutuellement indépendants, et on arrête les lancers dès que l'on obtient pile. On note pour tout entier $n \geq 1$ F_n : «Le n -ème lancer donne face», A_n : «Les n premiers lancers donnent face», et A : «on n'obtient jamais pile». Montrer que pour tout entier N , $P(A) \leq P(A_N)$. En déduire que A est quasi-impossible. ([Q000473])

34. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirages successifs avec remise de la manière suivante : si la boule tirée est blanche, on arrête. Sinon on la remet, et on rajoute une boule noire de plus dans l'urne. On note B_n l'évènement « le n -ème tirage amène la boule blanche », $\beta_n = P(B_n)$, et J : « Le jeu s'arrête ». Montrer que la suite (β_n) converge vers 0. ([Q000474])

35. Soit $N > 0$ un entier. On dispose de N urnes $U_1, \dots, U_N$. Pour tout entier $j \in \{1 \dots N\}$, l'urne j contient N boules, dont exactement j sont blanches. On choisit au hasard une urne, puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Soit B_N l'évènement : « on a obtenu une boule blanche. » Calculer $P(B_N)$. Étudier la

limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$. ([Q000484])

36. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire successivement une boule avec remise et on ajoute après chaque tirage une boule noire dans l'urne. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la probabilité que la première boule noire tirée apparaisse au n -ème tirage. ([Q000485])

37*. On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués avant d'observer le 6. Calculer la loi de la variable X ([Q000500])

38*. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. On lance N fois un dé équilibré. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. Soit Y a variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus. Calculer la loi de la variable Y . ([Q000501])

39*. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi, et Z la variable définie par $Z = \max(X_1, X_2)$. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X_1 . ([Q000502])