

CH1 – Séries numériques

Plan du chapitre

1	Généralités	3
	A) Ce qu'est une série	3
	B) Convergence d'une série	3
	C) Série tronquée	4
	D) Structure vectorielle de l'ensemble des séries	5
	E) Séries de références	6
2	Étude de la convergence des séries	7
	A) Condition nécessaire de convergence	7
	B) Condition suffisante de convergence	7
3	Méthodes d'étude des séries à termes positifs	8
	A) Convergence monotone	8
	B) Équivalents	8
	C) Théorème de comparaison	8

Liste des définitions

Déf.1	Série numérique, terme général (t.g.) d'une série	3
Déf.2	Somme partielle, suite des sommes partielles d'une série	3
Déf.3	Convergence d'une série - somme d'une série - nature d'une série	3
Déf.4	Troncature d'une série	4
Déf.5	Combinaison linéaire de séries	5
Déf.6	Séries exponentielles	7
Déf.7	Série harmonique	7
Déf.8	série grossièrement divergente	7
Déf.9	Absolue convergence	7

Liste des techniques de base

T1.	Séries télescopiques	3
T2.	Calcul de somme d'une série tronquée	4
T3.	Calcul de la somme d'une série géométrique tronquée	6
T4.	Comment étudier la nature d'une série ?	8
T5.	Comment calculer la somme d'une série ?	9
T6.	Comparaison avec une intégrale pour l'étude de $\sum_{n \geq p} f(n)$	10

Grille d'analyse des exercices (cours et TD)

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T₀** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. ☐ **★** Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

1 Généralités

A) Ce qu'est une série

■ Définition 1 [Série numérique, terme général (t.g.) d'une série]

- C'est un nouveau type d'objet. Ce n'est ni un nombre, ni une suite.
- Un objet de type série est noté : $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

Dans cette notation :

1. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite réelle ou complexe.
2. n_0 est la rang initial de la série, souvent $n_0 = 0, 1$ ou 2 . C'est aussi le rang initial de la suite (u_n) .
3. u_n s'appelle dans ce contexte le *terme général de la série*. C'est également le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

■ Définition 2 [Somme partielle, suite des sommes partielles d'une série]

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$, est une série, la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ de terme général $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ s'appelle *suite des sommes partielles* de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Le nombre S_n s'appelle *somme partielle* (de rang n) de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

■ Proposition 1 [Lien entre t.g et somme partielle d'une série]

Pour la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$: $\forall n > n_0 \quad S_{n-1} + u_n = S_n$

B) Convergence d'une série

■ Définition 3 [Convergence d'une série - somme d'une série - nature d'une série]

Avec les notations des définitions précédentes :

1. La série est dite *convergente* si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ de ses sommes partielles est convergente.
2. La limite ℓ de cette suite s'appelle la *somme* de la série. Elle se note $\ell = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$
3. Si une série n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente*.
4. Étudier la *nature* d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

■ Exemple 1.

1. La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ est divergente.
2. La série $\sum_{n \geq 0} (1/2)^n$ est convergente, car la suite des sommes partielles tend vers 2. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} (1/2)^n$ a pour somme 2. On écrit donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 2$

T₁

Séries télescopiques

Ce sont les séries du type $\sum_{n \geq n_0} u_n$ pour lesquelles le t.g est de la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$.

1. Comme les sommes partielles se calculent simplement par télescopage (en effet : $\forall n \geq p : S_n = v_{n+1} - \underbrace{v_{n_0}}_{\text{constante}}$),
2. on conclut de 1. que la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ des sommes partielles converge si et seulement si la suite (v_n) converge, et dans ce cas, la somme de la série est : $S = (\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n) - v_{n_0}$.

■ Exemple 2.

Étude de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)}$, et calcul de sa somme le cas échéant.

C) Série tronquée

■ Définition 4 [Troncature d'une série]

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série, et $n_1 \geq n_0$, la série $\sum_{n \geq n_1} u_n$ s'appelle une troncature de la série.

■ Proposition 2 [Invariance de la nature par troncature]

Une série et une troncature de celle-ci sont de même nature. Néanmoins, en cas de convergence, les sommes de ces dernières ne sont pas nécessairement égales.

■ Exemple 3.

Les séries $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ sont de même nature.

■ Remarque 1.

Ce résultat permet de simplifier l'étude de la nature d'une série puisqu'on peut étudier le t.g. ou les sommes partielles seulement à partir d'un certain rang dans les calculs.

T₂

Calcul de somme d'une série tronquée

En général une série est *distincte* de sa troncature.

1. P.ex, Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 2} u_n$ sont distinctes.

a) Toutefois, il existe un lien entre leurs sommes partielles respectives $(S_n)_{n \geq 0}$ et $(S'_n)_{n \geq 2}$. En effet :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad S_n &= u_0 + \cdots + u_n \quad (\text{par déf.}) \\ &= u_0 + u_1 + \underbrace{u_2 + \cdots + u_n}_{\text{présent car } n \geq 2} \\ &= u_0 + u_1 + S'_n \end{aligned}$$

b) Les sommes de ces séries sont donc en général distinctes car :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \stackrel{1.a)}{=} (u_0 + u_1) + \sum_{n=2}^{\infty} u_n$$

2. **Attention.** Ne pas confondre troncature $\neq$ glissement/-changement/translation d'indice. P.ex :

$$\underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}}_{\text{ma série}} \neq \underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!}}_{\text{troncature de ma série}} \quad \text{mais} \quad \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}}_{\text{ma série}} \stackrel{\substack{\text{glissement} \\ \text{d'indice}}}{=} \underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!}}_{\text{c'est encore ma série}}$$

D) Structure vectorielle de l'ensemble des séries

■ **Définition 5** [Combinaison linéaire de séries]

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont deux séries et a, b deux scalaires on définit la série notée $a \sum_{n \geq n_0} u_n + b \sum_{n \geq n_0} v_n$ comme la série $\sum_{n \geq n_0} (au_n + bv_n)$.

■ **Proposition 3** [structure vectorielle]

Soit $n_0 \geq 0$ un entier fixé.

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ des séries numériques de rang initial n_0 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Le sous-ensemble $\mathcal{S}_*$ des séries convergentes de $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

■ **Remarque 2.**

La somme d'une série convergente définit sur $\mathcal{S}_*$ une application linéaire, puisque si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont dans $\mathcal{S}_0$, alors :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (au_k + bv_k) = a \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + b \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$$

E) Séries de références

Servent tout le temps dans les exercices

■ Théorème 1 [Convergence des séries géométriques]

1. La série géométrique $\sum_{k \geq 0} q^k$ converge **si et seulement si** $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Il en est de même pour la série de t.g. q^{k+1} , (ou q^{k+2} etc).

2. Les séries géométriques dérivées $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (1)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}. \quad (2)$$

■ Remarque 3.

Ne pas confondre :

- Suite géométrique :
- Série géométrique :
- Somme de termes consécutifs d'une série géométrique :
- Somme d'une série géométrique :

T₃

Calcul de la somme d'une série géométrique tronquée

1. On écrit la somme sous forme développée :

$$S = \sum_{k=p}^{+\infty} q^{k-k_0} = q^{p-k_0} + q^{p+1-k_0} + \dots$$

2. **a)** Si le premier terme de la somme ainsi développé vaut 1 : on a la somme **complète** d'une série géométrique et $S = \frac{1}{1-q}$.

- b)** Sinon on factorise le premier terme de S pour se ramener au cas **2. a)** :

$$S = q^{p-k_0} \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots)}_{\substack{\text{somme complète} \\ \text{d'une série géométrique}}} = q^{p-k_0} \times \frac{1}{1-q}.$$

■ Exemple 4.

Calculer $S = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

■ Définition 6 [Séries exponentielles]

Ce sont les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

■ Théorème 2 [Convergence des séries exponentielles]

Pour tout réel x , la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \text{ En particulier } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

■ Définition 7 [Série harmonique]

C'est la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

■ Théorème 3 [Séries zêta]

1. La série harmonique diverge vers $+\infty$. Il en est de même pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ (Prop. 2).
2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Il en est de même pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^2}$ (Prop. 2).

■ Exemple 5.

Nature la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$, et calcul de la somme le cas échéant.

2 Étude de la convergence des séries

A) Condition nécessaire de convergence

■ Proposition 4 [Condition nécessaire de convergence d'une série]

Pour qu'une série soit convergente, il faut que son terme général converge vers 0. La réciproque est fausse (ça ne suffit pas!).

■ Exemple 6.

🦋 Le t.g. de la série harmonique converge vers 0, mais la série harmonique diverge (Thm. 3)

■ Définition 8 [série grossièrement divergente]

Série dont le terme général ne tend pas vers 0. Elle est divergente par contraposition de la prop. 4.

B) Condition suffisante de convergence

■ Définition 9 [Absolue convergence]

La série $\sum_{k \geq n_0} u_k$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{k \geq n_0} |u_k|$ est convergente.

■ Théorème 4 [Cond. suffisante de convergence]

Si une série converge absolument, alors elle converge. La réciproque est fausse.

■ Remarque 4.

Ceci incite à porter une attention particulière à l'étude des séries à termes positifs.

■ Exemple 7.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente mais non absolument convergente.

3 Méthodes d'étude des séries à termes positifs

A) Convergence monotone

■ **Théorème 5** [Cv monot. pour les séries à termes positifs]

Si la série $\sum_k u_k$ est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite des **sommes partielles** est **majorée**. Sinon, la série diverge vers $+\infty$.

B) Équivalents

■ **Théorème 6** [équivalents pour les séries à termes positifs]

Deux séries à termes positifs de termes généraux équivalents sont de même nature.

 On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux, pas les séries, ni les sommes partielles**.

■ Exemple 8.

Montrer que la série de terme général $u_k = \ln\left(1 + \frac{1}{4k^2}\right)$ converge.

C) Théorème de comparaison

■ **Théorème 7** [Critère de comparaison des séries à termes positifs (C.C.S.A.T.P.)]

Si à partir d'un certain rang p (souvent $p = 1, 2$) : $0 \leq u_k \leq v_k$ alors :

1. si la série $\sum_k v_k$ converge, la série $\sum_k u_k$ aussi. Dans ce cas, on a de plus la relation suivante sur

les sommes des séries : $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=p}^{+\infty} v_k$

2. si la série $\sum_k u_k$ diverge, la série $\sum_k v_k$ aussi.

 On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux, pas les séries, ni les sommes partielles**.

■ Exemple 9.

1. a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2. Étudier la nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{1/3}}$.

T₄

Comment étudier la nature d'une série ?

1. Si le t.g. ne tend pas vers 0 : **grossière divergence** (prop. 4). Fin.
2. Sinon : **reconnaître** :
 - a) le t.g. d'une série de référence ou une combinaison linéaire de t.g. de séries de nature connue.
 - b) sinon : le moment d'une variable aléatoire discrète.
 - c) sinon : une série télescopique,
3. Sinon : **calculer** les sommes partielles S_n si ce sont des sommes qu'on sait calculer (par **T0**), et étudier la nature de la suite (S_n) .
4. Sinon : examiner le **signe du t.g.** :
 - a) Si le terme général de la série est positif :
 - i) chercher un équivalent du t.g. et utiliser les séries de référence.
 - ii) sinon, utiliser le CCSATP sur le t.g..
 - b) Sinon : étudier l'absolue convergence de la série pour se ramener à un t.g. positif.

Remarques universelles et vitales sur l'étude des séries :

1. 💀 On travaille **toujours** sur le t.g. (sauf situation **3.**)
2. Dans les études de nature, ou calculs de sommes, on ne manipule **jamais la série elle-même**.
3. On n'introduit jamais **la somme** d'une série avant d'avoir prouvé sa convergence. Il est obligatoire d'abord de la prouver par les méthodes **1-4** listées ci-dessus.

T₅**Comment calculer la somme d'une série ?**

Si vous en êtes à cette, étape, c'est que vous avez **obligatoirement** établi la convergence de la série par **T4**

1. Reconnaître le moment d'une variable aléatoire discrète (et appliquer éventuellement la formule de Koenig).

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}.$$

2. Calcul explicite des sommes partielles si ce sont des sommes usuelles, notamment **T1**. Attention aux troncatures **T2**.
3. Écrire le t.g comme CL de t.g. de séries de sommes connues.

$$(n^2 + n)x^{2n} \stackrel{q=x^2}{=} n(n-1)q^n + 2nq^n$$

$$\stackrel{n^2+n=n^2-n+2n=n(n-1)+2n}{=} \underbrace{q^2 n(n-1)q^{n-2}}_{\text{connu}} + \underbrace{2q nq^{n-1}}_{\text{connu}}$$

T₆**Comparaison avec une intégrale pour l'étude de $\sum_{n \geq p} f(n)$**

Si f est une fonction *décroissante positive*, pour prouver la convergence de $\sum_{n \geq p} f(n)$:

1. On fixe un rang $k \geq p$, et par décroissance de f :
 $\forall t \in [k-1, k] \quad 0 \leq f(k) \leq f(t).$
2. Donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall k \geq p \quad 0 \leq u_k \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

3. Enfin, en sommant les inégalités précédentes de $k = p$ à $k = n$ ($n \geq p$ étant entier fixé), par relation de Chasles :

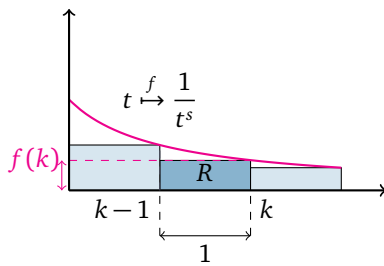
$$\forall n \geq p \quad 0 \leq S_n \leq \int_{p-1}^n f(t) dt.$$

4. Si on sait majorer cette dernière intégrale par un réel *in-dépendant de n* , cela établit la convergence de la série.

Rem. On peut aussi établir la **divergence** de la série en **minorant** les sommes partielles par une intégrale tendant vers $+\infty$ avec n .

Exemple 10.

Convergence de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ pour $s > 1$.



1. Par décroissance sur $\mathbf{R}_+^*$ de $t \mapsto \frac{1}{t^s}$:
- $$\forall k \geq 2 \quad \forall t \in [k-1, k] \quad 0 \leq \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{t^s}$$

2. puis par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{k^s}}_{\text{Aire du rectangle } R=1 \times f(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^s}$$

Aire du rectangle $R=1 \times f(k)$

3. et enfin par sommation de $k=2$ à $k=n$ et par la relation de Chasles :

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^s}. \text{ D'où par primitivation :}$$

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{n^{s-1}} \right) \leq \frac{1}{s-1}.$$

4. Les sommes partielles de la série sont majorées par $1/(s-1)$.
Comme la série est à termes positifs, elle converge.