

CH3 – Variables aléatoires discrètes

Plan du chapitre

1	Notions de bases sur les Variables aléatoires discrètes	2
2	Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète	2
	A) Propriétés	2
	B) Obtention de la loi par la fonction de répartition	3
3	Lois usuelles de première année	4
	A) Rappels terminologiques	4
	B) Lois usuelles de première année	5
4	Loi géométrique sur N^*	5
	A) Définition	5
	B) Fonction de répartition	5
	C) Graphique	6
	D) Moments	6
	E) Simulation	6
	F) Propriétés complémentaires	7
5	Loi de Poisson	7
	A) Définition	7
	B) Fonction de répartition	8
	C) Graphique	9
	D) Moments	9
	E) Simulation	9
6	Simulation informatique d'une variable aléatoire discrète	10
	A) Qu'est-ce que simuler une variable aléatoire discrète ?	10
	B) Principe	10
	C) Implémentation	11
7	Moments des variables aléatoires discrètes	11
	A) Moment d'ordre r d'une variable aléatoire	11
	B) Espérance d'une variable aléatoire discrète	11
	C) Variance, Écart-type	13

Liste des définitions

Déf.1	V.A.R. discrète	2
Déf.2	Loi d'une var discrète	2
Déf.3	Épreuve de Bernoulli - succès - paramètre de succès	4
Déf.4	Schéma de Bernoulli - paramètres du schéma	4
Déf.5	Loi géométrique $\mathcal{G}_{N^*}(p)$	5
Déf.6	Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	7
Déf.7	Simulation d'une variable aléatoire	10
Déf.8	Moment d'ordre r : $M_{X,r}$	11
Déf.9	Espérance	11
Déf.10	Variance - écart-type	13

Liste des techniques de base

T31.	Quand calculer F_Y pour obtenir la loi de Y ?	3
T32.	Comment calculer la loi d'une VAR Y donnée ?	4
T33.	Prouver qu'une VAR X suit une loi binomiale ou géométrique	6
T34.	À quoi sert la formule de transfert ?	12
T35.	Comment prouver l'existence de l'espérance d'une VAR Y et la calculer ?	12
T36.	Prouver l'existence de la variance	14
T37.	Calculer la variance d'une VAR Y	14

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

- T₀** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
- Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
- C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
- ☐ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

1 Notions de bases sur les Variables aléatoires discrètes

■ Remarque 1.

Les **variables aléatoires** finies (1ère année) sont un cas particulier de variables aléatoires discrètes.

■ Définition 1 [V.A.R. discrète]

Toute **variable aléatoire** X telle que $X(\Omega)$ est **au plus dénombrable**.

■ Remarque 2.

On peut donc indexer les éléments de $X(\Omega)$ sur un ensemble d'entiers :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \mid n \in I\} \text{ où } I \text{ est une partie finie ou infinie de } \mathbb{N}.$$

■ Exemple 1.

1. Les VAR définies sur un EPF sont des VAR discrètes (cf. Cours de première année.)
2. Si X est la VAR définie pour $k \in \mathbb{N}^*$ par : $P\left(X = \frac{1}{k}\right) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, X est une VAR discrète (ici $x_n = 1/n$, et $n \in I = \mathbb{N}^*$).
3. Les variables à densité **ne sont pas** des VAR discrètes.

■ Théorème 1 [S.Q.C.E associé à une V.A.R. discrète]

Si X est une VAR discrète et $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in I}$,^a alors les événements $[X = x_n]$ pour n décrivant I forment un **SQCE** appelé système quasi-complet d'événements associé à X .

a. Souvent $I = \mathbb{N}$, ou $I = \mathbb{N}^*$ ou encore $I = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, et $x_n = n$.

■ Définition 2 [Loi d'une var discrète]

Si X est une VAR discrète d'espace image $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in I}$, la fonction définie sur $X(\Omega)$ par $p(x_k) = P(X = x_k)$ est une **fonction de masse** induisant une **mesure de probabilité** sur $X(\Omega)$ appelée loi de la variable X .

■ Exemple 2.

À quelle condition sur α on définit une variable aléatoire X sur $\Omega = \mathbb{N}^*$ en posant $P(X = k) = \frac{\alpha}{k(k+1)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$?

2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

■ Remarque 3.

Les propriétés universelles des **fonctions de répartition** sont vérifiées à savoir : positivité, croissance, limites en $\pm\infty$.

A) Propriétés

■ Proposition 1 [Propriétés des fonctions de répartition de VAR discrètes]

Notons $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in I}$. Pour tout réel t :

1. **a)** $F_X(t) = \sum_{\substack{n \in I \\ x_n \leq t}} P(X = x_n).$
b) F_X est constante sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}[$
2. En particulier, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$:
a) $F_X(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P(X = k).$
b) Pour $k > 0$:
 $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$

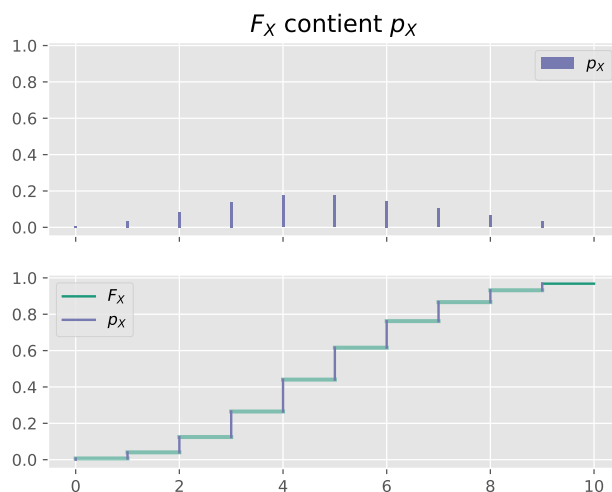
■ Remarque 4.

De façon générale, si on peut ordonner en une suite strictement croissante les éléments de $X(\Omega) = x_1 < x_2 < \dots < x_n \dots$, il est vrai que $P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$ en convenant que $F(x_0) = 0$.

B) Obtention de la loi par la fonction de répartition

■ Théorème 2 [La fonction de répartition contient la loi]

Deux variables aléatoires ont même loi si et seulement elles ont même fonction de répartition.



L'amplitude de la discontinuité de F_X au point x_k vaut $P(X = x_k)$.

■ Exercice 1.

Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire donnant le score d'un dé fou.

T_{3.1}

Quand calculer F_Y pour obtenir la loi de Y ?

1. Typiquement pour calculer loi d'un maximum, c'est-à-dire, si $Y = \max(X_1, X_2)$. En effet, on part de :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad [\max(X_1, X_2) \leq t] = [X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t].$$

Ce qui permet de calculer $F_Y(t)$ en passant aux probas. Souvent X_1, X_2 sont indépendantes, ce qui permet de simplifier le calcul..

2. Ensuite on obtient la loi de X par **prop. 2**
3. Dans le cas d'un minimum, on utilise plutôt la *fonction de survie* $S_Y : t \mapsto P(Y > t) = 1 - F_Y(t)$, et on part de :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad [\min(X_1, X_2) > t] = [X_1 > t] \cap [X_2 > t].$$

4. Le raisonnement et le calcul sont identiques pour un maximum (ou minimum) d'un nombre fini n de variables aléatoires, puisque si $t \in \mathbf{R}$:

$$[\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq t] = [X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t] \cap \dots \cap [X_n \leq t].$$

T3.2

Comment calculer la loi d'une VAR Y donnée ?

1. Essayer de reconnaître une loi usuelle. Pour cela on se fait une idée de l'espace image, ce qui permet de réduire le nombre de candidats possibles (ex : si 0 n'est pas observable, cela élimine Bernoulli, Binomiale, Poisson). On peut se demander aussi si l'espace image est fini ou infini, ce qui peut éliminer toutes les lois de 1^{ère} ou de 2^{ème} année!). Si on devine une loi binomiale ou géométrique, on passe à **T3**.
2. On peut essayer de relier Y à une VAR X qui suit une loi usuelle. Il faut alors être soigneux sur la détermination de l'espace image de Y en fonction de celui de X . Ensuite on exprime $[Y = k]$ pour $k \in Y(\Omega)$ en termes de la variables X dont la loi est connue.
3. Si Y est un max ou un min, on utilise **T1**.
4. Sinon, il faudra calculer à la main la loi de Y . Pour cela :
 - a) Déterminer l'espace image $Y(\Omega)$:
 - On justifie que les valeurs extrêmes de Y sont observables (c'est assez facile).
 - On ajoute que les cas intermédiaires sont possibles.
 - b) On calcule $P(Y = k)$ pour $k \in Y(\Omega)$ avec **T7**. **CH9**

■ Exercice 2.

On lance deux dés fous mutuellement indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand score obtenu des deux. Calculer la loi de X .

■ Exercice 3.

Soit $p \in]0, 1[$. Une pièce truquée donne pile avec probabilité p . On lance cette pièce une infinité de fois. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. On s'intéresse aux longueurs des lancers amenant une même face : on dit que la première série est de longueur $n \in \mathbb{N}^*$ si :

- Les lancers 1, 2, 3, ..., n donnent le même côté de la pièce.
- Le $n + 1$ -ème lancer donne l'autre côté de la pièce.

On note L la variable aléatoire égale à la longueur de la première série, et on convient que L prend la valeur 0 si il n'y a pas de changement de face. Déterminer la loi de L .

3 Lois usuelles de première année

A) Rappels terminologiques

■ **Définition 3** [Épreuve de Bernoulli - succès - paramètre de succès]
 Expérience aléatoire à l'issue de laquelle il n'y a que deux observations possibles. L'une de ces observations (privilégiée dans le contexte de l'expérience) s'appelle succès. La probabilité d'observer le succès s'appelle paramètre de succès de l'épreuve.

■ **Définition 4** [Schéma de Bernoulli - paramètres du schéma]
 Répétitions (finies ou infinies) mutuellement indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli p . Si les répétitions sont en nombre fini N , le couple (N, p) s'appelle paramètres du schéma.

B) Lois usuelles de première année

Données. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne U contient n boules numérotées de 1 à n indistingables au toucher, et une proportion p de ces boules est blanche, et on pose $q = 1 - p$.

Expérience	Mesure	Loi de X	$X(\Omega) =$	$P(X = k) =$ ($k \in \Omega$)	$E(X)$	$V(X)$
1. On tire λ boules au hasard successivement avec remise	X compte le nombre de boules tirées	$X \rightsquigarrow \mathcal{C}(\lambda)$	$\{\lambda\}$	$P(X = \lambda) = 1$	λ	0
2. On tire 1 boule au hasard	X vaut 0 si la couleur observée est noire, 1 sinon	$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = p$ $P(X = 1) = q$	p	pq
3. On tire 1 boule au hasard	X mesure le numéro de la boule tirée	$X \rightsquigarrow \mathcal{U}(n)$	$\{1 \dots n\}$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
4. On tire successivement avec remise N boules	X mesure le nombre de boules blanches tirées	$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(N, p)$	$\{0 \dots N\}$	$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$	Np	Npq

■ Exercice 4.

Soit $N \geq 1$ un entier. Une urne contient N boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à $N-1$. On tire une boule au hasard. Soit Y la variable aléatoire égale au numéro observé. Donner la loi de Y , son espérance et sa variance.

4 Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$

A) Définition

■ Définition 5 [Loi géométrique $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$]

On dit que X suit une loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in]0, 1[$ si :

1. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
2. $\forall k \in \mathbb{N}^* P(X = k) = pq^{k-1}$ (où $q = 1 - p$).

Dans ce cas on note $X \rightsquigarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$

■ Remarque 5.

1. La loi géométrique est la loi du nombre d'essais effectués pour obtenir le premier succès lors de répétitions mutuellement indépendantes d'une même **épreuve de Bernoulli** de paramètre p .
2. Si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$, la variable $Y = X - 1$ qui compte donc le nombre d'échecs avant le premier succès. On a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(Y = k) = pq^k$.

B) Fonction de répartition

■ Proposition 2 [Fonction de répartition de la loi $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$]

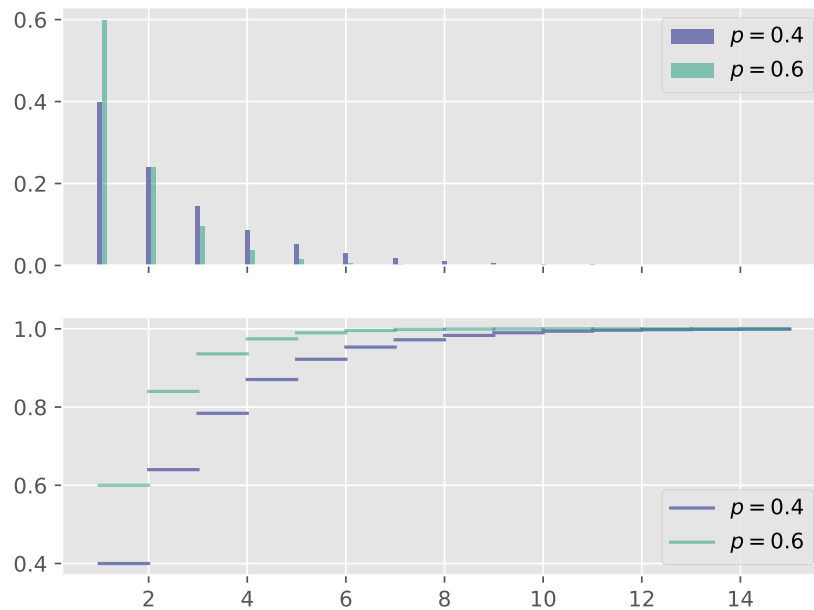
Si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$, pour tout réel t :

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - q^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en notant $q = 1 - p$

C) Graphique

Lois $\mathcal{G}_{N^*}(p)$
Fonction de masse



Fonction de répartition

D) Moments

■ **Théorème 3** [Moments de la loi $\mathcal{G}_{N^*}(p)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}_{N^*}(p)$ alors X admet espérance et variance et :

1. $E(X) = \frac{1}{p}$.
2. $V(X) = \frac{q}{p^2}$.

■ **Remarque 6.**

En moyenne, le premier succès apparaît à un rang d'ordre $\frac{1}{p}$.

■ **Exercice 5.**

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique sur N^* de paramètres respectifs p, p' . Calculer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

E) Simulation

```
1 def geom(p):
2     k = 1
3     while random() > p: # Ce booléen vaut False avec probabilité p
4         k += 1
5     return k
```

T3.3

Prouver qu'une VAR X suit une loi binomiale ou géométrique

1. Dans les deux cas, on commence par identifier l'épreuve de Bernoulli (E) sous-jacente à l'expérience., son succès et son paramètre de succès p .
2. On précise que l'expérience liée à Y consiste en répétitions **mutuellement indépendantes** de (E). La suite de l'argumentation diffère suivant la loi qui nous intéresse :
 - a. Si X compte le **nombre de succès** observés sur un nombre N fini de répétitions de (E) : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(N, p)$
 - b. Si X mesure le **temps d'apparition** du 1er succès en répétant (E), alors : $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$

F) Propriétés complémentaires

■ **Proposition 3** [Absence de mémoire de la loi géométrique]
 Si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}_{N^*}(p)$ alors :

$$\forall n \in N^* \quad \forall k \in N^* \quad P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$$

■ **Remarque 7.**

Interprétation : savoir qu'on a déjà fait n essais ne donne aucune information supplémentaire sur le fait d'obtenir un succès k essais plus tard, puisque la relation de la proposition s'écrit :

$$\forall n \geq 0 \quad P_{X>n}(X > n+k) = P_{X>0}(X > 0+k)$$

5 Loi de Poisson

A) Définition

■ **Définition 6** [Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$]

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

1. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
2. $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Dans ce cas on note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

■ **Remarque 8.**

1. La loi de Poisson est appelée la loi des événements rares. En effet : elle compte approximativement le nombre de succès lors d'un grand nombre de répétitions d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes à faible paramètre de succès (une $\mathcal{B}(n, p)$ avec p petit et n grand).
2. Il n'existe pas d'expérience simple (du style : tirage dans une urne) attachée à une variable aléatoire qui suivrait une loi de Poisson.
3. Néanmoins, conformément au point 1., par exemple :
 - a) Le nombre d'accidents d'avion ayant eu lieu une année sur tous les vols peut être modélisé par une VAR de Poisson.
 - b) Le nombre de personnes nées le même jour dans le lycée aussi.

■ **Exercice 6.**

1. Proposer une expérience de tirage de boule dans une urne liée à une variable de loi $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$.
2. Compléter le tableau du **3.B)** en ajoutant une ligne dédiée à la loi géométrique.

■ Exercice 7.

1. Exprimer sous forme de somme de série le réel $S_\lambda = e^\lambda + e^{-\lambda}$ (on simplifiera au maximum la somme obtenue).
2. Soit $\lambda > 0$ et $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
 - a) Soit A l'évènement : «la valeur observée de X est paire». Exprimer A en termes de X .
 - b) Calculer $P(A)$.

B) Fonction de répartition

■ **Proposition 4** [Fonction de répartition de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout réel t :

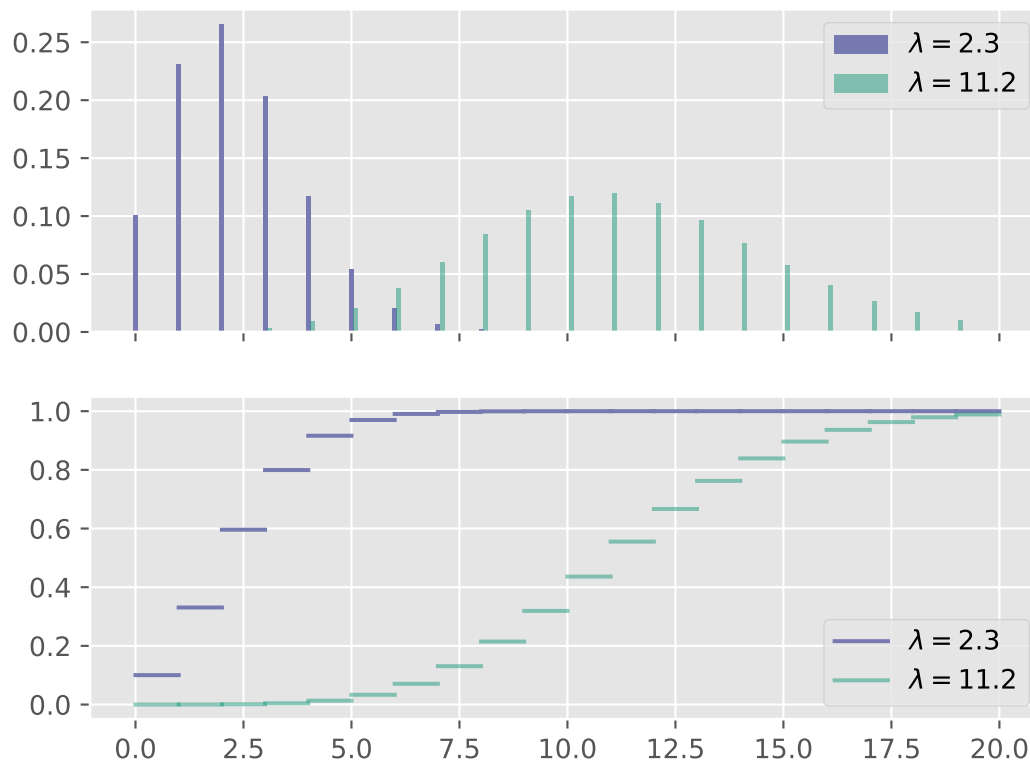
$$F_X(t) = \begin{cases} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \frac{\lambda^k}{k!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

■ Remarque 9.

Contrairement au cas de la loi géométrique, la fonction de répartition de la loi de Poisson n'a pas d'expression simple.

C) Graphique

Lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ Fonction de masse



Fonction de répartition

■ Remarque 10.

On peut remarquer que la [fonction de masse](#) se concentre autour des valeurs de k de qui sont de l'ordre de λ (à cause des croissances comparées).

D) Moments

■ **Proposition 5** [Moments de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors X admet espérance et variance et :

1. $E(X) = \lambda$.
2. $V(X) = \lambda$.

E) Simulation

Principe. Voir partie suivante.

```
1 from random import random
2 from numpy import exp
3 def Poisson(lambada):
4     k=0
5     p = exp(-lambada)    # Initialisation p_0
6     S = p                 # F_X(k)
```

```

7 | r = random()
8 | while r>S:
9 |     k+=1
10 |    p*=lambda/k
11 |    S+=p          # F_X(k+1)
12 | return k

```

- Ligne 3 (cf. Rem. 1) : on ne peut pas donner la fonction de masse en variable d'entrée. On calcule les p_k au fur et à mesure (ligne 10).
- ligne 10 : pour cela, on utilise le fait que la fonction de masse $k \mapsto p_k$ vérifie : $p_0 = e^{-\lambda}$ (ligne 5) et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad p_k = p_{k-1} \times \frac{\lambda}{k}$.

■ Remarque 11.

On peut aussi simplement simuler une loi binomiale de paramètres $N = 100$, $p = \frac{\lambda}{100}$, qui donne une bonne approximation de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ d'après les théorèmes limite.

6 Simulation informatique d'une variable aléatoire discrète

A) Qu'est-ce que simuler une variable aléatoire discrète ?

■ Définition 7 [Simulation d'une variable aléatoire]

Si X est variable aléatoire d'espace image $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$, simuler X , c'est écrire une fonction f telle que sur un grand nombre d'appels N de f (disons $N \geq 100$), f renvoie pour tout $i \in I$ la valeur $x[i]$ avec une fréquence acceptablement proche de $P(X = x_i)$.

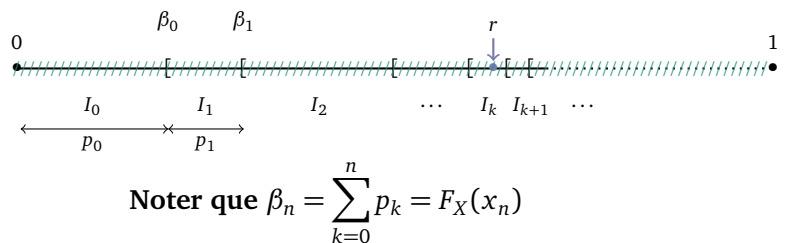
■ Remarque 12.

Autrement dit, les valeurs observées à l'écran de f suivent la loi de X , ou dit autrement, se distribuent suivant la loi de X .

B) Principe

Soit X une VAR discrète notons $X(\Omega) = \{x_0 < x_1 < \dots, x_n < \dots\}$ son espace image et posons $p_k = P(X = x_k)$.

1. Comme la série $\sum_{k \geq 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1, on peut partitionner l'intervalle $[0, 1[$ en intervalles de I_k de longueur p_k comme sur la figure.
2. On tire un flottant r au hasard dans $[0, 1[$ (on a représenté sur le dessin un grand nombre de tirages suivant une loi $\mathcal{U}(0, 1)$).
3. Simulation de X : comme la proportion de flottants r tombant dans I_k sur un grand nombre de tirages (dessinés en hachures) est environ p_k , on décide que si r tombe dans I_k , la valeur observée de X est alors x_k .



C) Implémentation

Code Python ▼

```

1 def simul(x,p)
2     """
3     entrées (listes de flottants)
4     x = [x0,...] : X(0omega)
5     p = [p0,...] : fonc. de masse
6     sortie : une réalisation de X
7     """
8     k=0
9     p = p[0]
10    S = p
11    r = random()
12    while r>S:
13        k+=1
14        S+=p[k]
15    return x[k]

```

■ Remarque 13.

Commentaires sur le script

- Ligne 1 : Si la VAR X prend un nombre **fini** de valeurs, la donnée exhaustive de la fonction de masse p en variable d'entrée de $\text{simul}(x,p)$ est possible (voir **Exple. 1**).
- Lignes 12-14 : Sinon, on essaie dans la boucle **while** de calculer les nombres $p[k]$ par récurrence (voir la simulation de la loi de Poisson en III E)).

■ Exemple 3.

Simulation de $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(2, 1/3)$:

```

1 t = 1/3 # paramètres de la loi binomiale
2 s = 1-t
3 x = [0,1,2] # espace image de
4 p = [t**2, 2*t*s, s**2] # loi de X
5 simul(x,p)

```

7 Moments des variables aléatoires discrètes

A) Moment d'ordre r d'une variable aléatoire

■ Définition 8 [Moment d'ordre r : $M_{X,r}$]

La VAR X admet un moment d'ordre r si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$ est absolument convergente, c'est-à-dire si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^r P(X = x)$ est convergente. On pose alors :

$$M_{X,r} = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x).$$

■ Proposition 6 [Existence de moments]

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X admet un moment d'ordre r , alors tous les moments d'ordre inférieur existent aussi.

B) Espérance d'une variable aléatoire discrète

■ Définition 9 [Espérance]

La VAR X admet une espérance si et seulement si elle admet un **moment d'ordre 1** $M_{X,1}$, et dans ce cas

$$E(X) = M_{X,1} = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

■ Remarque 14.

Interprétation : $E(X)$ est valeur moyenne observée de X si l'expérience aléatoire à l'issue de laquelle X est mesurée est répétée un grand nombre de fois.

■ **Proposition 7** [Propriétés fonctionnelles de l'espérance]

L'ensemble des VAR discrètes sur Ω admettant un moment d'ordre 1 est un espace vectoriel et l'espérance E est une forme linéaire positive et croissante. Précisément :

1. Si X, Y sont deux VAR discrètes sur Ω admettant une espérance, alors pour tous réels λ, μ , la variable $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

En particulier :

$$E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu.$$

2. Si X est à valeurs positives quasi-certainement, $E(X) \geq 0$.
3. Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$.
4. Les grandeurs X et $E(X)$ sont dans les mêmes unités.
5. Si X possède une espérance, la variable notée $X - E(X)$, appelée variable centrée déduite de X , possède aussi une espérance, et celle-ci est nulle.

■ **Théorème 4** [Formule de transfert]

Soit f une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$, et Y la VAR donnée par $Y = f(X)$. Alors Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)| P(X = x)$ converge **absolument** et dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

T3.4

À quoi sert la formule de transfert ?

si Y s'exprime en termes d'une VAR X , mettons $Y = f(X)$, et de loi connue, le **thm. 4** nous donne le calcul de $E(Y)$ à l'aide de la loi de X sans connaître celle de Y .

T_{3.5}**Comment prouver l'existence de l'espérance d'une VAR Y et la calculer ?**

1. Si on reconnaît une loi usuelle, $E(Y)$ existe et est obtenu sans calculs.
2. Si Y est une transformée affine d'une VAR X dont on connaît l'espérance $Y = aX + b$, on utilise **prop.7 1**.
3. Sinon, **T114.**, et les techniques d'étude de convergence des séries à terme positifs (en cas de séries!). La plupart du temps :
 - soit on reconnaît le moment d'une loi usuelle,
 - soit on montre que le terme général de la série définissant $E(Y)$ (après peut-être utilisation de la formule de transfert **T114.**) est combinaison linéaire de t.g. de séries convergentes. À ce stade de l'argumentation, l'utilisation des symboles «série» $\left(\sum_{k \geq}\right)$ ou «somme de série» $\left(\sum_{k=}\right)$ sont interdits.
 - C'est seulement lors du calcul de la somme de la série qu'on manipule $\sum_{k=}$.

■ Exercice 8.

Étudier l'existence de l'espérance de la variable L de l'exercice 2, et la calculer le cas échéant

C) Variance. Écart-type**■ Proposition 8** [Existence de la variance et du moment d'ordre 2]

Soit X une VAR. Sont équivalents :

1. X admet une variance.
2. X admet un moment d'ordre 2.

■ Définition 10 [Variance - écart-type]

1. La variance de X est définie sous réserve d'existence par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

2. L'écart-type de X , noté σ_X est défini alors par

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

■ Proposition 9 [Propriétés fonctionnelles de la variance]

1. (Positivité). $V(X) \geq 0$.
2. (Homogénéité.) Si X est exprimée en unités u , $V(X)$ est en unité u^2 , et σ_X en unités u .
3. (Homogénéité et invariance par translation). Si a, b sont deux réels, $aX + b$ admet une variance et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

4. $V(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi quasi-certaine.

T_{3.6}

Prouver l'existence de la variance

1. Si l'énoncé de demande de prouver l'existence de l'espérance et de la variance, on peut prouver seulement l'existence du moment d'ordre 2 et conclure avec **prop. 6** et **déf. 9**
2. Par contraposition de **prop. 6** : si le moment d'ordre 1 n'existe pas, cela prouve que la V.A.R. n'a ni espérance, ni variance.

■ Théorème 5 [Formule de Koenig]

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si X admet une variance, alors X admet un moment d'ordre 2, une espérance et :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

T_{3.7}

Calculer la variance d'une VAR Y

1. Si on reconnaît une loi usuelle, $V(Y)$ est obtenu sans calculs
2. Si Y est une transformée affine d'une VAR X dont on connaît la variance, $Y = aX + b$, on utilise **prop.9 3**.
3. Sinon, on applique **Thm. 5**.

■ Exercice 9.

Étudier l'existence de la variance de la variable L de l'exercice 2 et la calculer le cas échéant.