

CH4 – Fonctions polynomiales

Plan du chapitre

1	Généralités	3
	A) Polynômes	3
	B) Unicité	3
	C) Degré	4
2	Opérations sur les polynômes	4
	A) Définitions	4
	B) Opérations et degré	5
3	Racines	5
	A) Racine (ou zéro) d'un polynôme	5
	B) Racine multiple	6
4	Factorisation	7
	A) Existence de racines	7
	B) Nombre de racines	8
	C) Factorisations classiques	9
	D) Relations coefficients-racines	9

Liste des définitions

Déf.1	Fonctions $1, X, X^k$	3
Déf.2	Monôme	3
Déf.3	Polynôme, coefficients d'un polynôme, polynôme nul	3
Déf.4	degré, terme dominant, coefficient dominant, polynôme unitaire/normalisé	4
Déf.5	Somme, facteur d'échelle, produit, composition, dérivation	4
Déf.6	Racine, zéro d'un polynôme	5
Déf.7	Racine simple, racine multiple, ordre de multiplicité d'une racine	6
Déf.8	Polynôme $\tilde{P}$	7
Déf.9	Factoriser P	8

1 Généralités

A) Polynômes

■ Définition 1 [Fonctions 1, X, X^k]

Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose :

$$\begin{aligned} X^k &: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto t^k \end{aligned}$$

La fonction X^0 est notée **1**, la fonction X^1 est notée X .

■ Remarque 1.

1. Ainsi : $\forall t \in \mathbb{K} \quad X^k(t) = t^k$.
2. La fonction **1** est une fonction *constante*.
3. 🦋 Il est donc *interdit* d'utiliser X comme nom de variable, ou d'inconnue dans la recherche des racines d'un polynôme.

T₁

Comment présenter la recherche des racines de P ?

En pratique on écrit : «Soit $z \in \mathbb{K}$. On résout l'équation $P(z) = 0$ »

Surtout, on n'écrit pas $P(X) = 0$

■ Définition 2 [Monôme]

Fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $t \mapsto at^k$ où $k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{K}^*$. Elle est notée aX^k

■ Remarque 2.

La fonction nulle n'est pas un monôme.

■ Définition 3 [Polynôme, coefficients d'un polynôme, polynôme nul]

1. On appelle polynôme toute fonction qui est soit la fonction nulle sur $\mathbb{K}$ (et on l'appelle polynôme nul), ou alors toute combinaison linéaire de monômes :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \quad (1)$$

2. Les scalaires a_k ci-dessus s'appellent les coefficients du polynôme P .

■ Remarque 3.

Comme une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle, la représentation (1) est également valable pour le polynôme nul.

B) Unicité

■ Théorème 1 [Principe d'identification]

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

- $P = Q \Leftrightarrow P$ et Q ont mêmes coefficients.
- En particulier : $P = 0 \Leftrightarrow$ les coefficients de P sont tous nuls.



Vérifier que l'on a bien une égalité de fonctions avant d'appliquer ce théorème.

C) Degré

■ **Définition 4** . [degré, terme dominant, coefficient dominant, polynôme unitaire/normalisé]

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et, avec les notations de **déf.3**, $E := \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$. Le degré de P est noté $d = \deg(P)$ et est défini par : $d = \sup E$

1. $d = -\infty \Leftrightarrow E = \emptyset \Leftrightarrow P = 0$.
2. Si $d \in \mathbb{N}$:
 - a) $a_d X^d$: s'appelle terme dominant de P
 - b) a_d s'appelle coefficient dominant/directeur de P
 - c) $a_d = 1$: P est dit normalisé/unitaire.

■ **Remarque 4.**

1. Le polynôme nul est de degré $-\infty$.
2. Les polynômes constants (sauf le polynôme nul) sont de degré 0.

T₂

Calcul du degré d'un polynôme

Penser à vérifier que $a_n \neq 0$ avant d'affirmer que P est de degré n .

■ **Exemple 1.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (n-2)X^n + X^2 + X + 1$. Donner le degré de P .

2 Opérations sur les polynômes

A) Définitions

■ **Définition 5** [Somme, facteur d'échelle, produit, composition, dérivation]

Soit $P := \sum_{k=0}^n a_k X^k, Q := \sum_{k=0}^m b_k X^k, \lambda \in \mathbb{K}$

• Somme : $P + Q := \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) X^k$

• Facteur d'échelle : $\lambda P := \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$

• Produit : $PQ := \sum_{k=0}^n c_k X^k$ où

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^k b_j a_{k-j}$$

• Composition : $P(Q) := P \circ Q$. En particulier $P(X) = P$.

• Polynôme dérivé : $P' \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^n k a_{k-1} X^{k-1}$

■ **Remarque 5.**

1. L'opération de composition est très utilisée dans le contexte des espaces vectoriels de polynômes

2. Question : ce qui suit est-il un abus d'écriture : $P(X) = P$? Pourquoi ?
3. 🦋 Le quotient de deux polynômes n'est pas un polynôme en général.

B) Opérations et degré

Soit $\bar{K} = K \cup \{-\infty\}$, et $\lambda \in \bar{K}$. On convient que :

- $-\infty + \lambda = \lambda + (-\infty) := -\infty$
- $-\infty \times \lambda = \lambda \times (-\infty) := -\infty$.
- $\forall \lambda \in \bar{K} \quad \lambda \geq -\infty$.

■ **Proposition 1** [degré de la somme, du produit, etc.]

Soit P de degré n et Q de degré m . Avec les conventions ci-dessus on a :

$R =$	$\deg(R) =$
$P + Q$	$\max(m, n)$ si $m \neq n$, sinon $\leq n$
λP	n si $\lambda \neq 0, -\infty$ sinon
$P \times Q$	$m + n$
$P \circ Q$	mn
P'	$n - 1$ si $n > 0, -\infty$ sinon

T₃

Calculer le degré des polynômes d'une suite (P_n)

Ce genre de suite de polynômes est très souvent définie par récurrence.

1. La plupart des propriétés à prouver sur les P_n s'établissent par une récurrence (à deux pas si la suite est à deux pas).
2. Pour les calculs de degré, penser à n'introduire que l'information utile dans les expressions algébriques, sous peine de s'embourber dans des expressions interminables. Si par exemple, on demande de prouver que P_n est de degré n , il suffit de formuler une hypothèse de récurrence du style :

$$\exists a_n \neq 0 \quad \exists R_n \in K[X] \quad P_n = a_n X^n + R_n \quad \deg(R_n) < n.$$

Inutile d'écrire par exemple :

$$P_n = a_n X^n + \underbrace{a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0}_{\text{non informatif}}$$

La partie non informative est résumée par R_n .

3 Racines

A) Racine (ou zéro) d'un polynôme

■ **Définition 6** [Racine, zéro d'un polynôme]

$a \in K$ est racine (ou zéro du polynôme $P \in K[X]$ signifie : $P(a) = 0$

T₄**Comment trouver les racines de $P \in \mathbb{K}[X]$?**

La recherche des racines de P permet d'amorcer sa factorisation d'après **Thm2** pour éviter d'écrire des horreurs comme $X = 1$ est racine de P !

1. On commence par se débarrasser de X en considérant l'équation $P(x) = 0$.
2. En dehors :
 - a) de racines évidentes,
 - b) des équations du second degré (voir **T9**)
 - c) des équations second degré déguisées^a),
 il est *vain* de chercher toutes les racines d'un polynôme sans indications.

a. Exemples :

i) Bicarrée : $x^4 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y + 1 = 0 \\ x^2 = y \end{cases}$

ii) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ e^x = y \end{cases}$

■ Théorème 2 [Racine et factorisation]

a est racine de P

$\Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{K}[X] \quad P = (X - a)R.$

B) Racine multiple

■ Définition 7 [Racine simple, racine multiple, ordre de multiplicité d'une racine]

Le nombre a est racine d'ordre de r de $P \Leftrightarrow \begin{cases} \exists R \in \mathbb{K}[X] & P = (X - a)^r R & (a) \\ R(a) \neq 0 & & (b) \end{cases}$

1. L'entier r s'appelle l'ordre de multiplicité de a dans P .
2. Si $r = 1$, la racine a est dite simple.
3. Si $r \geq 2$ on dit que a est racine multiple de P .

T₅**Factoriser P par $(X - a)$ quand $P(a) = 0$** Si P est de degré 3 il est certain que

$$P = (X - \alpha)(aX^2 + bX + c) \quad (*)$$

pour 3 scalaires a, b, c bien choisis.

1. Il est certain que $a =$ coefficient dominant de P .
2. De même en développant, il est certain que $-\alpha c =$ le terme constant de P . Ce qui donne la valeur de c
3. Reste à trouver b . Pour cela, soit β un scalaire de votre choix (autre que 0 ou α . Souvent $\beta = \pm 1$ est un bon choix dans la mesure du possible). En calculant $P(\beta)$ avec la définition de P , puis avec $(*)$, on trouve que $P(\beta) = (\beta - \alpha)(a\beta^2 + b\beta + c)$, ce qui donne la valeur de b en résolvant, puisque a et c sont connus. Ce dernier calcul est très simple sur des cas particuliers.

T₆**Montrer que a est une racine multiple de P** On montre que $P(a) = P'(a) = 0$.

Il suit aussi de ce théorème que P divise Q (c-à-d Q se factorise par P) si et seulement si toute racine complexe de P est racine de Q avec multiplicité moindre.

■ **Définition 8** [Polynôme $\bar{P}$]
 C' est le polynôme déduit de P en remplaçant les coefficients de P par leurs conjugués.

■ **Théorème 3** [Évaluation et conjugaison]

Si $a \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ alors :

$$\overline{P(a)} = \bar{P}(\bar{a})$$

■ **Théorème 4** [Racines et complexes conjugués]
 Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et a est une racine non réelle de P alors $\bar{a}$ est racine de P avec la même multiplicité.

4 Factorisation

A) Existence de racines

■ **Théorème 5** [D'Alembert]
 Si P est non constant, P a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Ce théorème est existentiel : il ne dit rien sur comment calculer les racines.

B) Nombre de racines

■ Théorème 6 [Nombre de racines et degré]

- Un polynôme de degré n possède au plus n racines distinctes.
- Tout polynôme de degré n possède exactement n racines dans $\mathbf{C}$ à condition de les répéter autant de fois que leur multiplicité.

$$P = \alpha \prod_{k=1}^m (X - z_k)^{r_k} \quad (2)$$

où $z_1, \dots, z_m$ sont les m racines distinctes de P , $r_1, \dots, r_m$ leurs multiplicités respectives et α son coefficient dominant. En particulier $n = r_1 + \dots + r_m$

■ Définition 9 [Factoriser P]

Factoriser un polynôme P , c'est le mettre sous la forme (2).

T₇

Factoriser un polynôme de $\mathbf{K}[X]$

1. On commence par chercher des racines évidentes.
2. Si on trouve une racine non réelle α , et si P a tous ses coefficients **réels**, alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P .
3. Si on trouve n racines distinctes et que P est de degré n , on a toutes les racines de P .
4. Sinon on peut vérifier que la somme des multiplicités des racines trouvées fait bien $\deg(P)$.
5. On n'oublie pas le coefficient dominant dans la factorisation de P !



Toujours veiller à ne pas oublier le coefficient dominant de P dans sa factorisation.

■ Théorème 7 [Nullité d'un polynôme]

1. Si P s'annule une infinité de fois, alors P est nul.
2. Si P s'annule sur un intervalle non réduit à un point, P est nul.
3. Si P est de degré n et s'annule en r nombres distincts tels que $r > n$, alors P est nul.

T₈**Prouver que P est unique, que P est nul**

1. Pour prouver que P est unique, on considère un autre polynôme Q ayant les mêmes propriétés que P et on montre que $R = P - Q$ est nul, ce qui prouve que $Q = P$.
2. Pour prouver qu'un polynôme R est nul :
 - a) On peut montrer que R s'annule sur un intervalle. On conclut avec **thm 7. a)**
 - b) On peut montrer que R s'annule une infinité de fois. On conclut avec **thm 7. b)**
 - c) Si on a une majoration de son degré, mettons : $\deg(R) \leq n$. On peut montrer que R a plus de n racines distinctes. On conclut avec **thm. 7 c)**

C) Factorisations classiques

1. Polynômes du premier degré.
2. Polynômes du second degré à coefficients réels.
3. Factorisation de $X^2 - a$ $a \in \mathbb{C}$.
4. Factorisation dans $\mathbb{C}$ de $X^n - 1$.

T₉**Factorisations classiques du second degré**

1. $X^2 - 2X \cos \theta + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = 0$.
2. $X^2 - a$, $a \in \mathbb{C}$:
 - a) $a \in \mathbb{R}_+$. Ex : $X^2 - 31 = (x - \sqrt{31})(x + \sqrt{31})$
 - b) $a \in \mathbb{R}_-$. Ex : $X^2 + 17 = (x - i\sqrt{17})(x + i\sqrt{17})$
 - c) $a \notin \mathbb{R}$. Forme exponentielle de a + Moivre :

$$\begin{aligned}
 \text{Ex : } X^2 - (1 + i) &= X^2 - \sqrt{2}e^{i\pi/4} \stackrel{\text{Moivre}}{=} X^2 - \left(\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}\right)^2 \\
 &= \left(X - \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}\right)\left(X - \sqrt{\sqrt{2}}e^{-i\pi/8}\right)
 \end{aligned}$$

D) Relations coefficients-racines

1. Si $P = aX^2 + bX + c$ est un trinôme, la somme s et le produit p de ses racines sont reliés aux coefficients de P par les formules : $s = -b/a$ et $p = c/a$
2. En particulier, si $P \in \mathbb{R}[X]$, et si les racines sont non réelles (mettons z et $\bar{z}$), $s = z + \bar{z} = 2\Re(z)$ et $p = z\bar{z} = |z|^2$.

T₁₀**Usage des relations coefficients-racines**

Formules particulièrement utiles pour :

- 1.** Deviner dans certains cas les racines d'un trinôme.
 - 2.** Trouver la deuxième racine d'un trinôme connaissant la première.
 - 3.** Savoir si les racines sont réelles sans calculer Δ (en effet $p \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$)
 - 4.** Développer rapidement un trinôme.
-