CH5 – Couples de variables aléatoires discrètes

Plan du chapitre

1 Couples de VAR discrètes 4
A) Couple 4
B) Loi conjointe 4
C) Lois marginales 5
D) Lois conditionnelles 5
2 Moments 6
A) Formule de transfert pour des variables finies 6
B) Covariance 6
C) Corrélation et dépendance 6
3 Résultats sur les sommes de VAR 7
A) Moments 7
B) Loi de $X+Y$ où X, Y sont à valeurs entières positives 7
C) Stablilité des lois binomiales par somme 7
D) Stablilité des lois de Poisson par somme 8

Liste des définitions

Déf.1 Couple de variable aléatoires discrètes 4
Déf.2 Loi ou loi conjointe du couple 4
Déf.3 Lois marginales d'un couple de var 5
Déf.4 Loi conditionnelle de X sous l'observation de $Y = y_j$ 5
Déf.5 Covariance de deux var 6
Déf.6 Variables décorrélées 6

Liste des techniques de base

T5-1. Comment calculer une somme double ? 3
T5-2. Comment trouver la loi conjointe d'un couple (X, Y) ? 4
T5-3. Comment calculer la loi de $Z = X + Y$ 7
T5-4. Quand utiliser le lemme des coalitions ? 8

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

- Connaître les règles de calculs de sommes doubles.
- I, J : sous-ensembles de $\mathbf{N}$.
- $(\Omega, \mathscr{T}, P)$: espace probabilisé fixé et X, Y deux VAR discrètes sur Ω.
- $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ familles de nombres indexées sur I et J. Ces familles sont finies si I et J sont finis. Sinon, ils sont infinis et dénombrables.
- Dans ce qui suit $X(\Omega) = \{x_i \quad i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \quad j \in J\}$.

T5.1

Comment calculer une somme double ?

Donnée : une somme $S = \sum_{i,j} a_{ij}$ de nombres complexes.

1. Le calcul d'une somme double consiste **toujours** en le calcul **consécutif** de deux sommes simples : on somme d'abord par rapport à un premier indice (i ou j **au choix**, rien n'est obligé), puis par rapport à l'indice restant.

2. On calculera d'abord en faisant **un choix**, puis en écrivant :

$$S = \underbrace{\sum_{i=\square}}_{\text{somme extérieure}} \left(\underbrace{\sum_{j=\square} a_{ij}}_{\text{somme intérieure}} \right) \overset{\text{ou}}{=}_{\text{au choix}} \underbrace{\sum_{j=\square}}_{\text{somme extérieure}} \left(\underbrace{\sum_{i=\square} a_{ij}}_{\text{somme intérieure}} \right)$$

a) Ce **choix** est contraint en général par la **faisabilité** du calcul.

b) Le problème dans ce genre d'écriture est alors de **déterminer correctement les plages de valeurs de $\square$ prises par i et j** dans l'expression de S.

3. Les symboles des sommes doubles permettent sans efforts de se souvenir de ces plages pour peu que l'on respecte les deux règles de lecture suivantes de ces symboles :

Règle d'or 1. L'indice de la somme extérieure ne peut **jamais** dépendre de celui de la somme intérieure. *On fera donc varier l'indice de la somme extérieure sur toute la plage donnée, et l'autre indice ne doit pas apparaître*

Règle d'or 2. En général, l'indice intérieur dépend de l'autre. *On fera donc varier l'indice de la somme intérieure sur la plage obtenue en bornant par rapport à l'indice de la somme extérieure.*

Les notations sont assez explicites pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

4. Cas particulier le plus courant :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} = \sum_{i=\square}^{\square} \sum_{j=\square}^{\square} = \sum_{j=\square}^{\square} \sum_{i=\square}^{\square}$$

■ Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$. Calculer $S = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} x^j$.

CC BY NC SA

2. Calculer $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

1 Couples de VAR discrètes

A) Couple

■ Définition 1 ..... [Couple de variable aléatoires discrètes]
Donnée de deux VAR discrètes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Le couple est noté (X, Y) (l'ordre compte).

B) Loi conjointe

■ Définition 2 ..... [Loi ou loi conjointe du couple]
C'est la mesure de probabilité induite par la fonction de masse π définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ par :

$$\pi(x_i, y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j) \overset{\text{notation}}{=} P(X = x_i, Y = y_j)$$

■ Remarque 1.

Il arrive de représenter la loi conjointe dans un tableau :

$x =$ \ $y =$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1					
x_2					
$\vdots$				$\downarrow$	
x_i			$\rightarrow$	$P(X = x_i, Y = y_j)$	
$\vdots$					

■ Exercice 2.
Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On réalise l'expérience suivante :

— On tire une boule au hasard dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

— Si on observe $[N = i]$, on lance ensuite i fois une pièce non truquée.

On note alors T la variable aléatoire égale au nombre de piles observés lors de l'expérience. Déterminer la loi conjointe du couple.

T5·2 **Comment trouver la loi conjointe d'un couple (X,Y) ?**

1. On commence par déterminer les univers images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ de X et Y.
2. **a)** On met en évidence les éventuelles incompatibilités : on détecte les valeurs $(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ pour lesquelles $P(X=i,Y=j)=0$, ce qui permet de placer les zéros évidents dans le tableau de la loi conjointe.
   b) Pour les coeffs restants : les techniques usuelles du calcul de probas (décompositon d'évènements, probas composées, *etc.* : **T1-7.**)
3. On peut aussi **calculer les lois conditionnelles** de X sous les observations de Y dans le cas où ces lois sont des lois usuelles, **et la loi marginale de** Y (ou l'inverse si ce sont les lois conditionnelles de Y qui sautent aux yeux !)

C) Lois marginales

■ **Définition 3** ..... [Lois marginales d'un couple de var]
Si (X,Y) est le couple, les lois marginales du couple sont les lois des VAR X et Y.

■ **Théorème 1** ..... [*Loi conjointe donne lois marginales*]
Soit $x\in X(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE associé à Y la série de t.g. $P(X=x,Y=y_j)$ converge et :

$$P(X=x)=\sum_{j\in J}P(X=x,Y=y_j)$$

■ **Remarque 2.**

1. On a évidemment un résultat semblable pour l'obtention de $P(Y=y)$.
2. Ainsi les lois marginales se trouvent en marge du tableau de la loi conjointe.

D) Lois conditionnelles

■ **Définition 4** ..... [Loi conditionnelle de X sous l'observation de $Y=y_j$]
Soit (X,Y) un couple de var discrètes. Si $y_j\in Y(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sous l'observation de l'évènement $[Y=y_j]$ est la mesure de probabilité induite par la fonction de masse π définie sur $X(\Omega)$ par :

$$\forall i\in I\quad \pi(x_i)=P_{[Y=y_j]}(X=x_i).$$

■ **Remarque 3.**

1. Définition semblable pour la loi de Y conditionnellement à $[X=x_i]$.
2. X a donc autant de lois conditionnelles que de valeurs prises par Y.
3. La connaissance de loi marginale de X et des lois conditionnelles de Y permet de retrouver la loi conjointe

■ **Exemple 1.**
Cas typique : X suit une loi usuelle et les lois conditionnelles de Y sous l'observation de X sont des lois usuelles. C'est le cas si p.ex on lance un dé (Var X de loi $\mathscr{U}(6)$) et qu'ensuite on lance une pièce X fois et qu'on note Y le nombre de pile obtenus (les lois conditionnelles de Y sont des lois binomiales).

2 Moments

A) Formule de transfert pour des variables finies

■ Théorème 2 ..... [*De transfert*]
Soit (X,Y) un couple de VAR prenant chacune un nombre fini de valeurs, mettons $X(\Omega) = \{x_1 < \cdots < x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1 < \cdots < y_p\}$ $(n,p \in \mathbf{N})$.
Soit u une fonction de deux variables et soit $Z = u(X,Y)$. Alors l'espérance de Z est donnée par :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} u(x_i,y_j)P(X=x,Y=y) \\ &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} u(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j) \end{aligned}$$

B) Covariance

■ Définition 5 ..... [Covariance de deux var]
Pour deux variables admettant des moments d'ordre 2 :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := E\left[(X-E(X))\times(Y-E(Y))\right]$$

Son signe renseigne sur la tendance qu'ont ces variables à évoluer dans le même sens.

■ Proposition 1 ..... [Propriétés de la covariance]
La covariance est bilinéaire, et $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.

■ Théorème 3 ..... [*Formule de Koenig*]
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la relation suivante a un sens et est vraie :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

■ Exemple 2.
Calculer la covariance du couple (N,T). Interpréter.

C) Corrélation et dépendance

■ Définition 6 ..... [Variables décorrélées]
X,Y sont décorrélées si leur covariance est nulle. Sinon, on dit qu'elles sont corrélées.

■ Proposition 2 ..... [Espérance de variables décorrélées]
Deux variables X et Y sont décorrélées si et seulement si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

■ Proposition 3 ..... [Lien entre indépendance et corrélation linéaire]

$$\begin{array}{ccc} X,Y \text{ indépendantes} & \Rightarrow & \mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \\ \mathrm{Cov}(X,Y) = 0 & \not\Rightarrow & X,Y \text{ indépendantes} \\ \mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0 & \Rightarrow & X,Y \text{ dépendantes} \end{array}$$

■ Exemple 3.
Les variables N et T sont-elles indépendantes ?

■ Remarque 4.
Pour les variables de Bernoulli toutefois, décorrélation et indépendance mutuelle sont équivalentes.

3 Résultats sur les sommes de VAR

A) Moments

■ Proposition 4 ..... [Moments des sommes de VAR]

1. $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$
2. $V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.
3. En particulier, si les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont mutuellement indépendantes :
   $V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$

■ Exemple 4.
Une urne contient 10 boules, dont 3 noires, les autres sont blanches. On effectue 10 tirages successifs avec remise. Soit B et N les variables aléatoires égales au nombre de boules blanches et noires tirées. Calculer la covariance de N et B ainsi que le coefficient de corrélation.

B) Loi de $X+Y$ où X,Y sont à valeurs entières positives

■ Théorème 4 ..... [*Loi de $X+Y$*]
Soit X,Y deux var discrètes sur Ω telles que $X(\Omega)\subset\mathbf{N}$ et $Y(\Omega)\subset\mathbf{N}$. Alors $Z=X+Y$ est aussi à valeurs dans $\mathbf{N}$ et sa loi est donnée par : $\forall n\in\mathbf{N}$

$$\begin{aligned}P(Z=n) &= \sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n-k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}P(X=n-k,Y=k)\end{aligned}$$

T5.3

Comment calculer la loi de $Z=X+Y$

Le calcul s'apparente à celui d'une intégrale de convolution. Il faut donc être soigneux sur les bornes de la somme à calculer dans $P(Z=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=n-k,Y=k)$, en discutant à n fixé quelles sont les valeurs de k pour lesquelles $P(X=n-k,Y=k)>0$

■ Exemple 5.
Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre p. Calculer la loi de T_1+T_2.

C) Stablilité des lois binomiales par somme

■ Théorème 5 ..... [*Somme variables binomiales indépendantes*]
Soit $p\in]0,1[$ est donné, N_1,N_2 deux entiers >0. Si $X_1\rightsquigarrow\mathscr{B}(N_1,p)$, $X_2\rightsquigarrow\mathscr{B}(N_2,p)$ et sont **mutuellement indépedantes** alors $Z=X_1+X_2$ suit une loi $\mathscr{B}(N_1+N_2,p)$.

cc BY NC SA

D) Stablilité des lois de Poisson par somme

■ **Théorème 6** ..... [*Somme de variables de Poisson indépendantes*]
Soit λ_1, λ_2 réels > 0. Si $X_1 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$ et sont **mutuellement indépedantes** alors $Z = X_1 + X_2$ suit une loi $\mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

■ **Remarque 5.**
Ces deux derniers théorèmes s'étendent à un nombre fini arbitraire de variables **mutuellement indépendantes** (et de **même paramètre de succès pour des variables binomiales**).

■ **Théorème 7** ..... [*Lemme des coalitions*]

Soit $n \geq 2$ un entier et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$ et f une fonction de r variables. Alors, les variables $f(X_1, \ldots, X_r), X_{r+1}, \ldots X_n$ sont mutuellement indépendantes

---

T5.4

Quand utiliser le lemme des coalitions ?

Cas typique : calcul de la loi d'une somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes par récurrence.

1. L'initialisation repose sur le **Thm 4.** (ou un calcul de convolution pour des variables à densité) et constitue le point le plus technique de la preuve.
2. Le lemme des coalitions intervient dans l'héréedité pour justifier la mutuelle indédpendance de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_{n+1}.
3. On conclut dans l'hérédité grâce à l'initialisation qui constitue dans ce contexte un théorème général pour deux VAR : il s'applique alors pour S_n et X_{n+1}
