Programme de colles semaine 7 — Du 9/11 au 13/11

Thèmes :

Couples de variables aléatoires réelles - Fonctions polynomiales

Fonctions polynomiales à coefficients dans K

1. Les polynômes sont simplement vus comme fonctions définies sur **K**. Pas de notion d'indéterminée.
2. Fonctions X^k, $k \in \mathbf{N}$.
3. Unicité des coefficients.
4. Degré
5. Terme dominant, coefficient dominant.
6. Opérations sur les polynômes : somme, produit, multiplication par un scalaire, composition (notation $P(Q)$), polynôme dérivé.
7. Racine ou zéro d'un polynôme.
8. $a \in \mathbf{K}$ est racine de P si et seulement si P se factorise par $(X - a)$.
9. Pas d'arithmétiques des polynômes. La relation de divisibilité n'est pas au programme !
10. Pas de division euclidienne, ni en puissances croissantes.
11. Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation par factorisation. **Le calcul de l'ordre de multiplicité par les dérivées successives n'est pas au programme.**
12. Si $P \in \mathbf{R}[X]$, et $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ est racine de P, alors $\bar{a}$ aussi avec la même multiplicité.
13. Théorème de d'Alembert-Gauss.
14. Factorisation sur **C** des polynômes. Nombre de racines.
15. Nullité d'un polynôme et nombre de racines.
16. **La notion de polynôme scindé est hors-programme**.

Couples de variables aléatoires discrètes

1. Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.
2. Covariance pour des variables admettant des moments d'ordre 2. Formule de König-Huygens.
3. Pas de calculs de sommes séries doubles (hors-programme).
4. Stabilité des lois binomiales, de Poisson par somme avec les hypothèse *ad hoc*.
5. Indépendance de variables indépendantes lien avec la covariance.

1 – Remédiation des erreurs en WS

Aussi longtemps que nécessaire

2 – Vérification de colle sur les techniques de base (QC)

Liste des questions à poser

1. On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$(S)\begin{cases} P_0 = & 1 \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad P_{n+1} = & (1-X)^{n+1} + (n+1)P_n \end{cases}$$

   (a) Calculer P_1, P_2.

   (b) Déterminer pour tout entier $n \geq 1$ le terme dominant de P_n.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ dont la loi est donnée par :

$$\forall n \geq 1 \quad P(X=n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

   Montrer que la variable $Z = (X+1)(X-1)$ admet une espérance et en déduire que X admet espérance et variance.

3. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Une urne contient des boules noires et des boules blanches. La proportion de boules blanches est p. On effectue N tirages successifs avec remise dans cette urne, et on note X (resp. Y) le nombre de boules blanches (resp. noires) tirées. Calculer $\text{cov}(X,Y)$. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

4. Une urne contient initialement 5 boules bleues et 3 boules rouges. On tire successivement avec remise une boule dans cette urne jusqu'à obtenir deux fois de suite une boule de la même couleur. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Simuler la variable X.

5. Un polynôme est représenté sous Python par la liste de ses coefficients rangés par degré croissant. Coder une fonction `degre(P)` prenant en entrée une liste `P` représentant un polynôme P et renvoyant son degré si P est non nul, sinon `-1`.

3 – Exercice libre dans le temps restant