Programme de colles semaine 6 — Du 2/11 au 6/11

Thèmes : Variables aléatoires discrètes - Fonctions polynomiales

Variables aléatoires discrètes

1. Variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{T})$.
2. Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire discrète.
3. Fonction de répartition : domaine de définition, monotonie, limites en l'infini.
4. Moments d'une VAR discrète.
5. Espérance. Propriétés fonctionnelles.
6. Variance. Propriétés fonctionnelles.
7. Théorème de transfert.
8. Formule de Konig-Huygens.
9. Variable aléatoire centrée, ou réduite. Variable $X^\star$ centrée réduite associée à la VAR X.
10. Lois usuelles :
    (a) Loi certaine.
    (b) Loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$. Espérance.
    (c) Loi de Bernoulli, espérance, variance.
    (d) Loi binomiale, espérance, variance.
    (e) Loi géométrique, espérance, variance.
    (f) Loi de Poisson, espérance, variance.
11. Simulation des lois usuelles : $\mathscr{U}(n)$, $\mathscr{B}(p)$, $\mathscr{B}(N,p)$, $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^*}(p)$.

En plus des connaissances de bases (Définitions, propriétés, théorèmes, *etc.*), vous devez réussir à mobiliser les techniques listées dans le chapitre pour ne pas bloquer dans un exercice.

Fonctions polynomiales à coefficients dans K

1. Les polynômes sont simplement vus comme fonctions définies sur $\mathbf{K}$. Pas de notion d'indéterminée.
2. Fonctions X^k, $k \in \mathbf{N}$.
3. Unicité des coefficients.
4. Degré
5. Terme dominant, coefficient dominant.
6. Opérations sur les polynômes : somme, produit, multiplication par un scalaire, composition (notation $P(Q)$), polynôme dérivé.

7. Racine ou zéro d'un polynôme.
8. $a \in \mathbf{K}$ est racine de P si et seulement si P se factorise par $(X-a)$.
9. Pas d'arithmétiques des polynômes. La relation de divisibilité n'est pas au programme !
10. Pas de division euclidienne, ni en puissances croissantes.
11. Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation par factorisation. **Le calcul de l'ordre de multiplicité par les dérivées successives n'est pas au programme.**
12. Si $P \in \mathbf{R}[X]$, et $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ est racine de P, alors $\bar{a}$ aussi avec la même multiplicité.
13. Théorème de d'Alembert-Gauss.
14. Factorisation sur $\mathbf{C}$ des polynômes. Nombre de racines.
15. Nullité d'un polynôme et nombre de racines.
16. **La notion de polynôme scindé est hors-programme**.

1 – Remédiation des erreurs en WS

Aussi longtemps que nécessaire

2 – Vérification de colle sur les techniques de base (QC)

Liste des questions à poser

1. On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$(S)\begin{cases} P_0 = & 1 \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad P_{n+1} = & (1-X)^{n+1} + (n+1)P_n \end{cases}$$

   (a) Calculer P_1, P_2.

   (b) Déterminer pour tout entier $n \geq 1$ le terme dominant de P_n.

2. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi, et Z la variable définie par $Z = \max(X_1, X_2)$. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X_1.
3. On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués **avant** le lancer qui a amené le 6.

   (a) Déterminer la loi de la variable $X+1$.

   (b) En déduire la loi de X.

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ dont la loi est donnée par :

$$\forall n \geq 1 \quad P(X=n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

   Montrer que la variable $(X+1)(X-1)$ admet une espérance et en déduire que X admet espérance et variance.

5. Une urne contient initialement 5 boules bleues et 3 boules rouges. On tire successivement avec remise une boule dans cette urne jusqu'à obtenir deux fois de suite une boule de la même couleur. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Simuler la variable X.

3 – Exercice libre dans le temps restant