CH5 – Couples de variables aléatoires discrètes

Pas le thème le plus courant à l'écrit.
Pas très fréquent à l'oral des concours

Plan du chapitre

1 Couples de VAR discrètes 4
A) Couple 4
B) Loi conjointe 4
C) Lois marginales 5
D) Lois conditionnelles 5
2 Moments 6
A) Formule de transfert pour des variables finies 6
B) Covariance 6
C) Corrélation et dépendance 6
3 Résultats sur les sommes de VAR 7
A) Moments 7
B) Loi de $X+Y$ où X, Y sont à valeurs entières positives 7
C) Stablilité des lois binomiales par somme 7
D) Stablilité des lois de Poisson par somme 8

Liste des définitions

Déf.1 Couple de variable aléatoires discrètes 4
Déf.2 Loi ou loi conjointe du couple 4
Déf.3 Lois marginales d'un couple de var 5
Déf.4 Loi conditionnelle de X sous l'observation de $Y = y_j$ 5
Déf.5 Covariance de deux var 6
Déf.6 Variables décorrélées 6

Liste des techniques de base

T5-1. Comment calculer une somme double ? 3
T5-2. Comment trouver la loi conjointe d'un couple (X, Y) ? 4
T5-3. Comment calculer la loi de $Z = X + Y$ 7
T5-4. Quand utiliser le lemme des coalitions ? 8

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. ⋆ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

- Connaître les règles de calculs de sommes doubles.
- I, J : sous-ensembles de $\mathbf{N}$.
- $(\Omega, \mathscr{T}, P)$: espace probabilisé fixé et X, Y deux VAR discrètes sur Ω.
- $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ familles de nombres indexées sur I et J. Ces familles sont finies si I et J sont finis. Sinon, ils sont infinis et dénombrables.
- Dans ce qui suit $X(\Omega) = \{x_i \quad i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \quad j \in J\}$.

T5·1

Comment calculer une somme double ?

Donnée : une somme $S = \sum_{i,j} a_{ij}$ de nombres complexes.

1. Le calcul d'une somme double consiste **toujours** en le calcul **consécutif** de deux sommes simples : on somme d'abord par rapport à un premier indice (i ou j **au choix**, rien n'est obligé), puis par rapport à l'indice restant.

2. On calculera d'abord en faisant **un choix**, puis en écrivant :

$$S = \underbrace{\sum_{i=\square}^{\square}}_{\text{somme extérieure}} \left(\underbrace{\sum_{j=\square}^{\square} a_{ij}}_{\text{somme intérieure}} \right) \overset{\text{ou}}{=}_{\text{au choix}} \underbrace{\sum_{j=\square}^{\square}}_{\text{somme extérieure}} \left(\underbrace{\sum_{i=\square}^{\square} a_{ij}}_{\text{somme intérieure}} \right)$$

a) Ce **choix** est contraint en général par la **faisabilité** du calcul.

b) Le problème dans ce genre d'écriture est alors de **déterminer correctement les plages de valeurs de $\square$ prises par i et j** dans l'expression de S.

3. Les symboles des sommes doubles permettent sans efforts de se souvenir de ces plages pour peu que l'on respecte les deux règles de lecture suivantes de ces symboles :

Règle d'or 1. L'indice de la somme extérieure ne peut **jamais** dépendre de celui de la somme intérieure. *On fera donc varier l'indice de la somme extérieure sur toute la plage donnée, et l'autre indice ne doit pas apparaître*

Règle d'or 2. En général, l'indice intérieur dépend de l'autre. *On fera donc varier l'indice de la somme intérieure sur la plage obtenue en bornant par rapport à l'indice de la somme extérieure.*

Les notations sont assez explicites pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

4. Cas particulier le plus courant :

$$\sum_{1\le i\le j\le n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j}$$

adapter en cas d'inégalités strictes — règle d'or 1 — règle d'or 2 — $1\le i\le j\le n$ — $1\le i\le j\le n$

■ Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$. Calculer $S = \sum_{0\le i\le j\le n} x^j$.

Exercice 1 $\quad S = \sum_{0 \le i \le j \le n} x^j$

choix 1 : i à l'intérieur

$$S = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (j+1)\, x^j$$

ne fait pas partie des sommes de référence

choix 2 : j à l'intérieur

$$S = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} x^j$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} x^i \times \frac{1-x^{n-i+1}}{1-x} \quad \text{car } x \neq 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i - x^{n+1}}{1-x}$$

linéarité $\quad = \frac{1}{1-x} \left[\sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^{n+1} \right]$

$$= \frac{1}{1-x} \left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1} \right] \quad \text{car } x \neq 1$$

$$= \frac{1}{1-x} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1} \right]$$

$$\boxed{S = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+2)x^{n+1} - (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

à refaire.

2. $\quad S = \sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i}{j}$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{n(n+3)}{4}}$$

nb de termes de S

$$S = \sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \quad \text{si } q \neq 1$$

$$1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

+1 +1

$S = 1+2+3+\cdots+100$

$S = 100+99+98+\cdots+1$

2. Calculer $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

1 Couples de VAR discrètes

A) Couple

■ Définition 1 ..... [Couple de variables aléatoires discrètes]
Donnée de deux VAR discrètes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Le couple est noté (X, Y) (l'ordre compte).

TYP : couple de VAR = 2-liste de fonctions = 2-liste de VAR

B) Loi conjointe

■ Définition 2 ..... [Loi ou loi conjointe du couple]
C'est la mesure de probabilité induite par la fonction de masse π définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ par :

$$\pi(x_i, y_j) \underset{\text{notation}}{=} P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

■ Remarque 1.

Il arrive de représenter la loi conjointe dans un tableau :

espace image de Y

$x =$ \ $y =$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1					
x_2					
$\vdots$				$\downarrow$	
x_i			$\rightarrow$	$P(X = x_i, Y = y_j)$	
$\vdots$				$\cdot$	

loi du couple : ou loi conjointe du couple.

espace image de X

■ Exercice 2. (niveau sup)
Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On réalise l'expérience suivante :

— On tire une boule au hasard dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

— Si on observe $[N = i]$, on lance ensuite i fois une pièce non truquée.

On note alors T la variable aléatoire égale au nombre de piles observés lors de l'expérience. Déterminer la loi conjointe du couple.

CC BY NC SA

T5·2 **Comment trouver la loi conjointe d'un couple (X,Y) ?**

1. On commence par déterminer les univers images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ de X et Y.
2. **a)** On met en évidence les éventuelles incompatibilités : on détecte les valeurs $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ pour lesquelles $P(X=i, Y=j) = 0$, ce qui permet de placer les zéros évidents dans le tableau de la loi conjointe.
   b) Pour les coeffs restants : les techniques usuelles du calcul de probas (décompositon d'évènements, probas composées, *etc.* : **T1-7.**)
3. On peut aussi **calculer les lois conditionnelles** de X sous les observations de Y dans le cas où ces lois sont des lois usuelles, **et la loi marginale de** Y (ou l'inverse si ce sont les lois conditionnelles de Y qui sautent aux yeux !)

Voir D)

C) Lois marginales

■ **Définition 3** ..... [Lois marginales d'un couple de var]
Si (X,Y) est le couple, les lois marginales du couple sont les lois des VAR X et Y.

■ **Théorème 1** ..... [*Loi conjointe donne lois marginales*]
Soit $x \in X(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE associé à Y la série de t.g. $P(X=x, Y=y_j)$ converge et :

$$P(X=x) = \sum_{j\in J} P(X=x, Y=y_j)$$

voir l'exemple en rem 0.

■ **Remarque 2.**

1. On a évidemment un résultat semblable pour l'obtention de $P(Y=y)$.
2. Ainsi les lois marginales se trouvent en marge du tableau de la loi conjointe.

D) Lois conditionnelles

■ **Définition 4** ..... [Loi conditionnelle de X sous l'observation de $Y=y_j$]
Soit (X,Y) un couple de var discrètes. Si $y_j \in Y(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sous l'observation de l'évènement $[Y=y_j]$ est la mesure de probabilité induite par la fonction de masse π définie sur $X(\Omega)$ par :

$$\forall i \in I \quad \pi(x_i) = P_{[Y=y_j]}(X=x_i).$$

■ **Remarque 3.**

1. Définition semblable pour la loi de Y conditionnellement à $[X=x_i]$.
2. X a donc autant de lois conditionnelles que de valeurs prises par Y.
3. La connaissance de loi marginale de X et des lois conditionnelles de Y permet de retrouver la loi conjointe

■ **Exemple 1.**
Cas typique : X suit une loi usuelle et les lois conditionnelles de Y sous l'observation de X sont des lois usuelles. C'est le cas si p.ex on lance un dé (Var X de loi $\mathscr{U}(6)$) et qu'ensuite on lance une pièce X fois et qu'on note Y le nombre de pile obtenus (les lois conditionnelles de Y sont des lois binomiales).

CC BY NC SA

Exercice 2 utilise $T_{5.2}$

on travaille avec le couple (N, T)

1- Espaces image de N et T.

. $N(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ car $N \rightsquigarrow \mathcal{U}(3)$

. $T(\Omega)$? on peut observer au pire 0 pile.
Au maximum, on peut observer 3 pile.
Les cas intermédiaires sont possibles.

$$T(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$N=$ \ $T=$	0	1	2	3
1	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1$	0	0
2	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 1$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 2$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 1$	0
3	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\times 1$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\times 3$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\times 3$	$\frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{8}$

2-a) Incompatibles éventuelles : le nombre de pile observés ne peut excéder le nombre de lancers effectués. Autrement dit :

$\forall\ i < j \qquad P(\underbrace{N=i,\ T=j}_{\text{notation de } [N=i \cap T=j]}) = 0$

2-b) Soit $3 \geq i \geq j \geq 0$ Calculons $P(N=i, T=j)$

D'après la formule des probabilités composées :

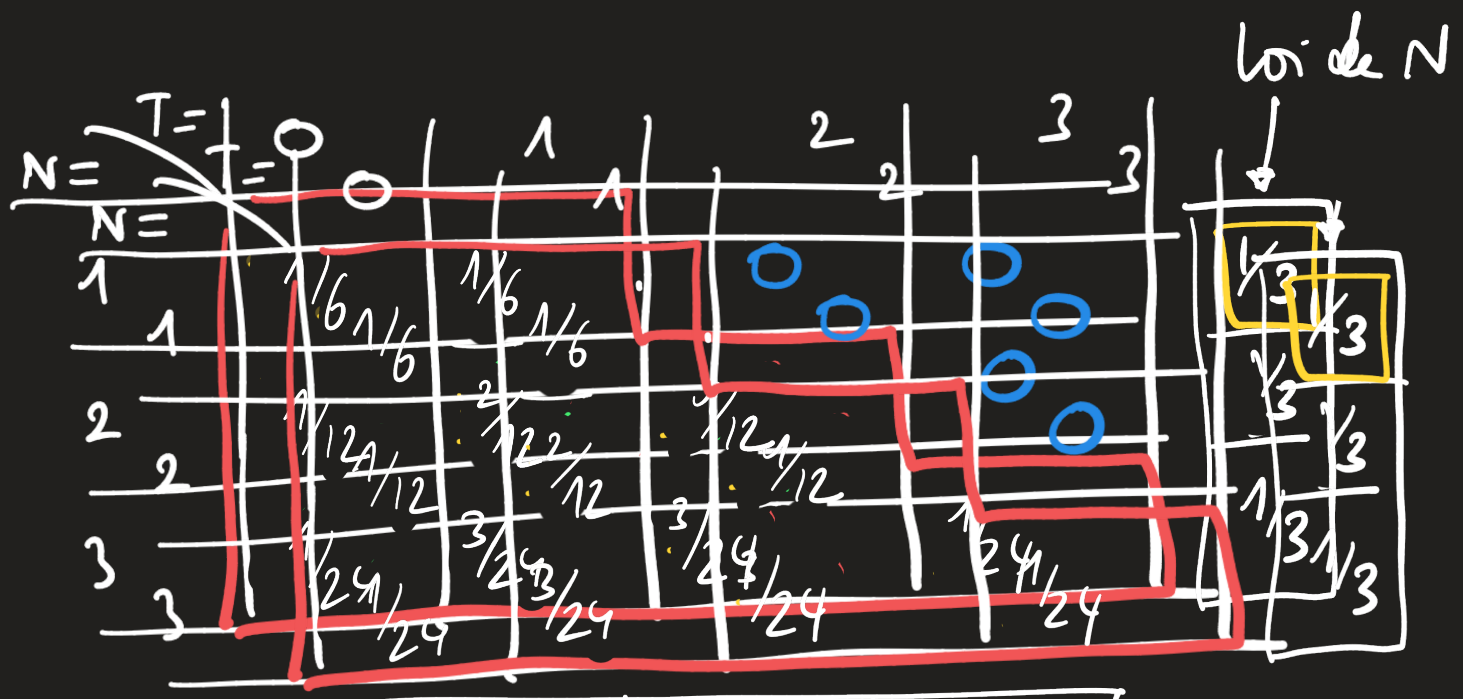
$$P(N=i, T=j) = P(T=j \mid N=i)\, P(N=i)$$
$$= P_{N=i}(T=j) \times \frac{1}{3} \quad \text{car } N \rightsquigarrow \mathcal{U}(3)$$

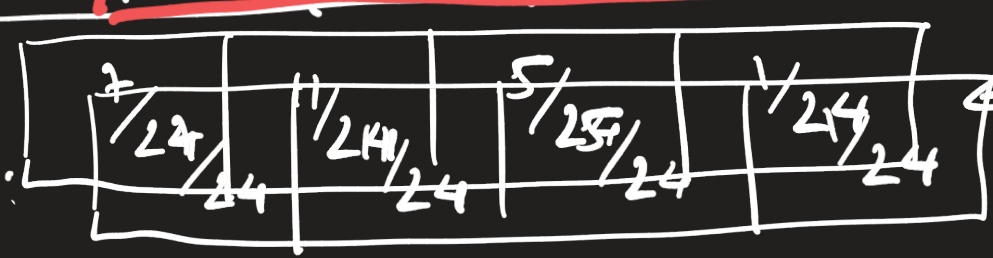
Sachant qu'on lance i fois la pièce :
en supposant les lancers mutuellement indépendants
obtenir "pile" est le succès de l'épreuve de Bernoulli "lancer la pièce et observer" (noté (E))

$P_{N=i}(T=j)$ est la probabilité d'obtenir j succès lors de i répétitions mutuellement indépendantes de (E) : on a un schéma de Bernoulli de paramètres $(i, 1/2)$:

$$P_{N=i}(T=j) = \binom{i}{j} \frac{1}{2^i} \qquad (p = q = \frac{1}{2})$$

Finalement $\boxed{P(N=i, T=j) = \frac{1}{3}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i} \text{ si } j \leq i}$





Rem 0 :

$$\boxed{1/3} = P(N=1 \cap T=0) + P(N=1 \cap T=1) + P(N=1 \cap T=2) + P(N=1 \cap T=3)$$

$$= 1/6 + 1/6 + 0 + 0$$

$$= P(N=1)$$ d'après la formule des probas totales avec le s.c.s.c.é $([T=j])_{0 \leq j \leq 3}$

Exemple 0 : illustre TS 2 point 3.

(marcherait aussi avec exercice 2).

- On tire un entier N au hasard suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
- Si on observe $[N=n]$, on lance n fois une pièce truquée faisant pile avec proba p. $(0<p<1)$.
- On note T la loi du nombre de pile obtenus.

Calculer la loi de T.

Solution : Si on suppose les lancers mutuellement indépendants, la loi conditionnelle de T sous l'observation de $[N=n]$ est une loi $\mathcal{B}(n,p)$ puisque : "lancer une pièce et regarder si elle fait pile" est une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall k\in[\![0,n]\!]\quad P(T=k\,|\,N=n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le SCE associé à N, on déduit que :

$\forall k\in\mathbb{N}$: la série de t.g. $P(T=k|N=n)P(N=n)$ converge, sa somme vaut $P(T=k)$:

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\quad P(T=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(T=k|N=n)P(N=n)}$$

$$=\sum_{n=k}^{+\infty}P(T=k|N=n)P(N=n)$$

mise en évidence des incompatibilités : en effet : si $n<k$, la probabilité d'observer k pile sachant que la pièce est lancée n fois est nulle : $P(T=k|N=n)=0$ pour $n<k$

$$\text{D'où}\quad P(T=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda}p^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^n q^{n-k}\frac{1}{n!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n q^{n-k}}{(n-k)!}\quad\text{par linéarité}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{n+k}\frac{q^n}{n!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n q^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^n}{n!}$$

on reconnaît la somme de la série e^x avec $x=\lambda q$

Finalement :
$\forall k\in\mathbb{N}$

$$P(T=k)=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda q}=e^{-\lambda}e^{\lambda q}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

$$=e^{\lambda q-\lambda}\times\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

$$=e^{\lambda(q-1)}\times\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

Comme $q-1=-p$: $\forall k\in\mathbb{N}\quad P(T=k)=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$

Conclusion $\boxed{T\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda p)}$

Rem : ceci prouve que :
La loi du nombre de succès lors de répétitions mutuellement indépendantes d'un nombre aléatoire (qui suit une loi de Poisson) d'épreuves de Bernoulli suit aussi une loi de Poisson.

2 Moments

A) Formule de transfert pour des variables finies

■ Théorème 2 ..... [*De transfert*]
Soit (X,Y) un couple de VAR prenant chacune un nombre fini de valeurs, mettons $X(\Omega) = \{x_1 < \cdots < x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1 < \cdots < y_p\}$ $(n,p \in \mathbf{N})$.
Soit u une fonction de deux variables et soit $Z = u(X,Y)$. Alors l'espérance de Z est donnée par :

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} u(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} u(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$$

B) Covariance

■ Définition 5 ..... [Covariance de deux var]
Pour deux variables admettant des moments d'ordre 2 :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := E\left[(X-E(X))\times(Y-E(Y))\right]$$
$$= E(\overline{X}\,\overline{Y}) \quad (\overline{U} : U \text{ centrée})$$

Son signe renseigne sur la tendance qu'ont ces variables à évoluer dans le même sens.

■ Proposition 1 ..... [Propriétés de la covariance]
La covariance est bilinéaire, et $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.

■ Théorème 3 ..... [*Formule de Koenig*]
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la relation suivante a un sens et est vraie :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$ ← utilisé pour calculer Cov(X,Y) en gal

■ Exemple 2.
Calculer la covariance du couple (N,T). Interpréter.

C) Corrélation et dépendance

■ Définition 6 ..... [Variables décorrélées]
X,Y sont décorrélées si leur covariance est nulle. Sinon, on dit qu'elles sont corrélées. (positivement ou négativement)

■ Proposition 2 ..... [Espérance de variables décorrélées]
Deux variables X et Y sont décorrélées si et seulement si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

■ Proposition 3 ..... [Lien entre indépendance et corrélation linéaire]

(1) X,Y indépendantes $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
(2) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ $\not\Rightarrow$ X,Y indépendantes : La réciproque de (1) est fausse
(3) $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$ $\Rightarrow$ X,Y dépendantes : contraposée de (1).

■ Exemple 3.
Les variables N et T sont-elles indépendantes ? Non car elles sont (positivement) corrélées

■ Remarque 4.
Pour les variables de Bernoulli toutefois, décorrélation et indépendance mutuelle sont équivalentes.

En effet : pour une Bernoulli : $E(X) = P(X=1)$.

Lycée Chateaubriand, Rennes
Classe de B_2^B 2026-2027
MY Patel
CC BY NC SA

Exemple 2 : calcul de $\mathrm{cov}(N,T)$

N \ T	0	1	2	3	↓
→ 1	1/6	1/6	0	0	1/3
→ 2	1/12	2/12	1/12	0	1/3
→ 3	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
	7/24	11/24	5/24	1/24	

Comme N et T sont des VAR finies (= elles prennent un nombre fini de valeurs), elles admettent des moments de tous ordres, et $\mathrm{cov}(N,T)$ existe.

D'après la formule de Koenig :

$$\mathrm{cov}(N,T) = \underset{①}{E(NT)} - \underset{②}{E(N)}\underset{③}{E(T)}$$

Calcul de ② $N \rightsquigarrow \mathcal{U}(3)$ donc $E(N) = \frac{3+1}{2} = 2$

* Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(n)$, $E(X) = \frac{n+1}{2}$

③ On a la loi marginale de T :

$$E(T) = 0\times\frac{7}{24} + 1\times\frac{11}{24} + 2\times\frac{5}{24} + 3\times\frac{1}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

① Calcul de $E(NT)$ (le plus pénible)

$$E(NT) \underset{\text{thm 2}}{=} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} ij\,P(N=i,T=j)$$ ($a_{ij}\times a_{ij}$)

$$\underset{\text{thm 2}}{=} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ij\,P(N=i,T=j)$$ car $a_{ij}=0$ si $j=0$

$$= \rightarrow 1\times1\times P(N=1,T=1)$$
$$\rightarrow +2\times1\times P(N=2,T=1) + 2\times2\times P(N=2,T=2)$$
$$\rightarrow +3\times1\times P(N=3,T=1) + 3\times2\,P(N=3,T=2) + 3\times3\,P(N=3,T=3)$$

$$= \rightarrow \quad 1/6$$
$$\rightarrow + \quad 2\cdot\frac{2}{12} \quad + \quad 4\cdot 1/2$$
$$\rightarrow + \quad 3\cdot\frac{3}{24} \quad + \quad 6\cdot\frac{3}{24} + 9\cdot\frac{1}{24}$$

$$= \frac{4+8+8+9+18+9}{24} = \frac{56}{24} = \frac{8\times7}{1\times3} = \frac{7}{3}$$

Finalement $\mathrm{cov}(N,T) = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} > 0$

Conclusion : La covariance est >0. On dit que N,T sont positivement corrélées.

Le nombre de pile a tendance à augmenter avec le nombre de lancers.

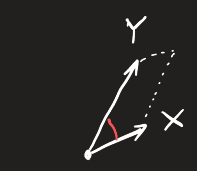
preuve de prop 2 : j'ai une équivalence à prouver :

(2 méthodes : ① Par équivalence : établir une suite de $\Leftrightarrow$)
② Par double implication : prouver $\Rightarrow$, puis $\Leftarrow$)

je choisis ① : X,Y décorrélés $\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \mathrm{cov}(X,Y)=0$

$\Leftrightarrow E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

$\overset{\text{thm 3}}{\Leftrightarrow} E(XY) = E(X)E(Y)$ ■



angle aigu : VAR positivement corrélées



angle obtus : VAR négativement corrélées

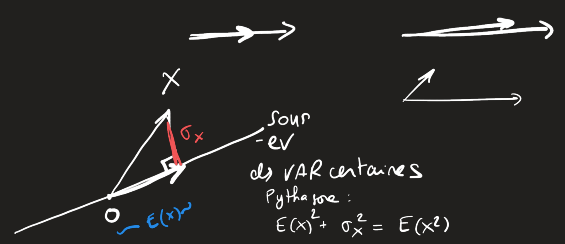


décorrélés

$E(XY)$ = aire du parallélogramme

$E(XY)$ = aire du rectangle = longueur × longueur = $E(X)E(Y)$

dans l'ev des VAR, cov joue le rôle de produit scalaire.



Pythagore : $E(X)^2 + \sigma_X^2 = E(X^2)$

$E(X)^2 + V(X) = E(X^2)$ Koenig

Explication de la prop 1 :

La covariance est bilinéaire :

elle est linéaire à droite et à gauche.

↓

- $Cov(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha Cov(X,Y) + \beta Cov(X,Z)$ (1)
- Comme $\boxed{Cov(X,Y) = Cov(Y,X)}$ (symétrie), la covariance est donc linéaire à gauche :

$Cov(\alpha Y + \beta Z, X) = Cov(X, \alpha Y + \beta Z)$

↑ symétrie

$= \alpha Cov(X,Y) + \beta Cov(X,Z)$

(1)

$= \alpha Cov(Y,X) + \beta Cov(Z,X)$

↑ symétrie

Exemple 6 : (utilise Thm 2).

On dispose d'un dé bleu et un dé caramel.

Soit B la VAR égale au score du dé bleu.

C ---------- caramel.

On considère l'équation aléatoire :

$$(E) \quad x^2 + Bx + C = 0$$

Soit Δ son discriminant.

Calculer $E(\Delta)$.

D'après la formule de transfert,

puisque $\Delta = B^2 - 4C$

$$E(\Delta) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} (i^2 - 4j) P(B=i, C=j)$$

En supposant les dés mutuellement indépendants :

B et C sont des VAR mutuellt indépendants.

$B \hookrightarrow \mathcal{U}(6) \quad C \hookrightarrow \mathcal{U}(6)$

$$E(\Delta) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} (i^2 - 4j) P(B=i) P(C=j)$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \frac{i^2 - 4j}{36}$$

$$= \frac{1}{36} \left[\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} j \right]$$

$$= \frac{1}{36} \left[\sum_{i=1}^{6} 6i^2 - 4 \sum_{i=1}^{6} 21 \right]$$

$$= \frac{1}{36} \left[6 \cdot 91 - 4 \times 6 \times 21 \right]$$

$$\boxed{E(\Delta) = \frac{1}{6} \left[91 - 84 \right] = \frac{7}{6}.}$$

En moyenne, sur un grand nombre de lancers des dés bleu et caramel, la valeur observée de Δ est $7/6$.

3 Résultats sur les sommes de VAR

A) Moments

■ Proposition 4 ..... [Moments des sommes de VAR]

1. $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$ (sous réserve que ces espérances existent)
2. $V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.
3. En particulier, si les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont mutuellement indépendantes :
   $V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$

■ Exemple 4.

Une urne contient 10 boules, dont 3 noires, les autres sont blanches. On effectue 10 tirages successifs avec remise. Soit B et N les variables aléatoires égales au nombre de boules blanches et noires tirées. Calculer la covariance de N et B.

B) Loi de $X+Y$ où X,Y sont à valeurs entières positives

■ Théorème 4 ..... [*Loi de $X+Y$*]

Soit X,Y deux var discrètes sur Ω telles que $X(\Omega)\subset\mathbf{N}$ et $Y(\Omega)\subset\mathbf{N}$. Alors $Z=X+Y$ est aussi à valeurs dans $\mathbf{N}$ et sa loi est donnée par : $\forall n\in\mathbf{N}$

$$\begin{aligned}P(Z=n) &= \sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n-k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}P(X=n-k,Y=k)\end{aligned}$$

T5.3 **Comment calculer la loi de $Z=X+Y$**

Le calcul s'apparente à celui d'une intégrale de convolution. Il faut donc être soigneux sur les bornes de la somme à calculer dans $P(Z=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=n-k,Y=k)$, en discutant à n fixé quelles sont les valeurs de k pour lesquelles $P(X=n-k,Y=k)>0$

calcul de la somme d'une somme : difficulté principale : bornes de la somme

---

■ Exemple 5.

Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre p. Calculer la loi de T_1+T_2.

C) Stablilité des lois binomiales par somme

■ Théorème 5 ..... [*Somme variables binomiales indépendantes*]

Soit $p\in]0,1[$ est donné, N_1,N_2 deux entiers >0. Si $X_1\rightsquigarrow\mathscr{B}(N_1,p)$, $X_2\rightsquigarrow\mathscr{B}(N_2,p)$ et sont **mutuellement indépedantes** alors $Z=X_1+X_2$ suit une loi $\mathscr{B}(N_1+N_2,p)$.

CC BY NC SA

Exemple 5 : $T_1 \rightsquigarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$ $T_2 \rightsquigarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$ indép.

loi de $Z = T_1 + T_2$.

- $Z(\Omega) = \{2,3,4,\dots\} = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- D'après le cours comme $T_1(\Omega) \subset \mathbb{N}$ $T_2(\Omega) \subset \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \{2,3,\dots\} \quad P(Z=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_1=k, T_2=n-k)$$

Dans cette somme, certains termes sont nuls : dès que $n-k$ n'est pas dans $T_2(\Omega)$, $[T_2 = n-k] = \emptyset$

$$n-k \in T_2(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad n-k \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad k \leq n-1$$

Finalement :

$$P(Z=n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(T_1=k, T_2=n-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} P(T_1=k) \times P(T_2=n-k) \text{ par mutuelle indép.}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} p q^{k-1} \times p q^{n-k-1} \text{ d'après la loi géom.}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = p^2 q^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$\boxed{P(Z=n) = (n-1) p^2 q^{n-2}} \quad (\text{cf DM2})$$

Deux exemples d'utilisation du théorème 4.

Exemple 5.0 (niveau sup) : On lance deux dés équilibrés. On note S la VAR égale au total de points marqués. Loi de S ?

En supposant les dés discernables, notons X_i la VAR égale au score du dé i. ($i \in \{1,2\}$)

$$S = X_1 + X_2$$

En supposant les lancers indépendants et par équiprobabilité, X et Y suivent des lois $\mathcal{U}(6)$.

Espace-image de S : $S(\Omega) = \{2, \dots, 12\}$

Calcul de la loi :

Soit $n \in S(\Omega)$: Cours (Thm 4) $\Rightarrow$: $P(S=n) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1=k, X_2=n-k)$

$$= \sum_{k=1}^{6} \underbrace{P(X_1=k) P(X_2=n-k)}_{a_k} \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2$$

dans cette somme : $k \geq n$ $\quad n-k \leq 0$ donc $P(X_2=n-k)=0$: $a_k = 0$

La somme s'arrête à $k<n$

- et si $n-k > 6$, $[X_2=n-k] = \emptyset$: $a_k = 0$

donc $\boxed{k \geq n-6}$

Finalement : $a_k \neq 0 \iff \begin{cases} n-6 \leq k \leq n-1 \\ 1 \leq k \leq 6 \end{cases}$ $(*)$

Explication de $(*)$:

$[S=2] = X_1=1 \cap X_2=1$ ← 1 seul terme

$[S=3] = [X_1=1 \cap X_2=2] \cup [X_1=2 \cap X_2=1]$ ← 2 termes

$[S=4] = [X_1=1 \cap X_2=3] \cup [X_1=2, X_2=2] \cup [X_1=3, 1]$ ← 3 termes.

$\vdots$

$[S=7] = [X_1=1 \cap X_2=6] \cup [X_1=2 \cap X_2=5] \cup \cdots \cup [X_1=6 \cap X_2=1]$ ← 6 termes

$\vdots$

$[S=12] = [X_1=6 \cap X_2=6)$ ← un terme dans la Σ

$(*) \iff \boxed{\max(1, n-6) \leq k \leq \min(6, n-1)}$

Ceci me permet de calculer les bornes de la somme

$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n-6 =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha = \max(1, n-6) =$	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6
$n-1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\beta = \min(6, n-1) =$	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6	6

On somme pour k allant de α à β pour obtenir $P(S=n)$

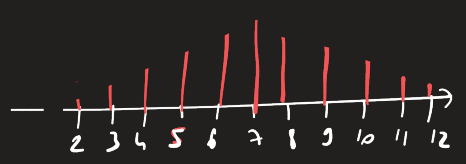
$$P(S=n) = \sum_{k=\alpha}^{\beta} 1/6 \times 1/6 = \frac{1}{36}(\beta - \alpha + 1)$$

loi de S :

$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{\beta-\alpha+1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

masse répartie symétriquement autour de $\frac{6}{36}$

loi de S



Rem : on peut tout à fait décomposer $[S=n]$ pour $n \in \{2 \dots 12\}$ en utilisant ∼ et en concluant par additivité finie !

Exemple 4 (classique)

La variable $T = B + N$ suit une loi certaine de paramètre 10. Donc $V(T) = 0$.

Comme $T = B + N$

$$0 = V(T) = V(B+N) = V(B) + V(N) + 2\,\mathrm{cov}(B,N)$$

(↑ prop 4.29)

Finalement : $$\mathrm{cov}(B,N) = -\frac{V(B)+V(N)}{2} < 0$$

loi de B : B compte le nombre de succès lors de 10 répétitions mutuellement indép. de l'épreuve de Bernoulli : "tirer une boule et regarder si elle est blanche".

$$B \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{7}{10}\right)$$

$$V(B) = 10 \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{10}.$$

loi de N : mêmes arguments : $N \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{3}{10}\right)$

$$V(N) = \frac{21}{10}.$$

$$\boxed{\mathrm{cov}(B,N) = -\frac{21}{10}}$$

B, N sont négativement corrélées.

X, Y, Z, T, U

$$W = \frac{X-Y}{U^2+1}, Z, T$$

$X_1 \ldots X_n$

$Y_i = \mathbb{1}_{X_i=1}$ $\mathbb{1}_{X_j=1} = Y_j$

Comment voir sur la loi du couple (X,Y) si X et Y sont indépendantes ?

Rappel :

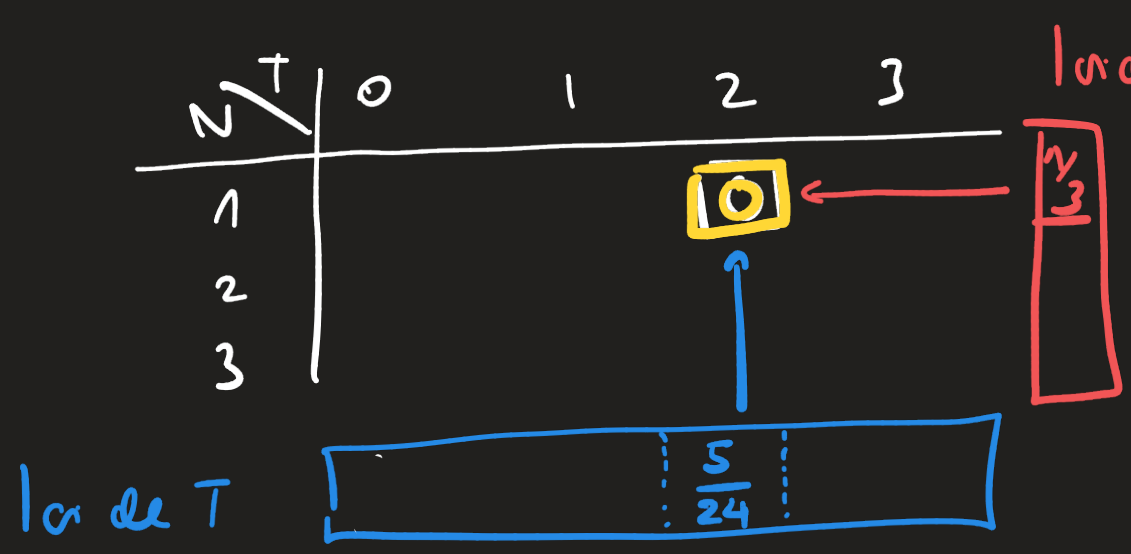
① Pour des VAR : en gal X et Y sont indépendants si et ssi :

(*) $\forall I, J$ ensembles $\quad P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I) \times P(Y \in J)$

② Dans le cas de VAR discrets $(*) \Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega)$, $\forall y \in Y(\Omega)$ $P(X=x, Y=y) = P(X=x) P(Y=y)$

$P(X=x, Y=y)$: loi conjointe ; $P(X=x)$ $P(Y=y)$: lois marginales

Dès qu'un zéro se situe à l'intersection de coefficients marginaux non nuls : X et Y sont **dépendantes**



$\frac{5}{24} \times \frac{1}{3} \neq 0$: N et T sont **dépendantes**

Confirmé par $Cov(N,T) > 0$.

D) Stablilité des lois de Poisson par somme

■ Théorème 6 ..... [*Somme de variables de Poisson indépendantes*]
Soit λ_1, λ_2 réels > 0. Si $X_1 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$ et sont **mutuellement indépedantes** alors $Z = X_1 + X_2$ suit une loi $\mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

■ Remarque 5.
Ces deux derniers théorèmes s'étendent à un nombre fini arbitraire de variables **mutuellement indépendantes** (et de **même paramètre de succès pour des variables binomiales**).

■ Théorème 7 ..... [*Lemme des coalitions*]

Soit $n \geq 2$ un entier et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$ et f une fonction de r variables. Alors, les variables $f(X_1, \ldots, X_r), X_{r+1}, \ldots X_n$ sont mutuellement indépendantes

---

T5·4

Quand utiliser le lemme des coalitions ?

Cas typique : calcul de la loi d'une somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes par récurrence.

1. L'initialisation repose sur le **Thm 4.** (ou un calcul de convolution pour des variables à densité) et constitue le point le plus technique de la preuve.
2. Le lemme des coalitions intervient dans l'héréedité pour justifier la mutuelle indédpendance de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_{n+1}.
3. On conclut dans l'hérédité grâce à l'initialisation qui constitue dans ce contexte un théorème général pour deux VAR : il s'applique alors pour S_n et X_{n+1}

---

preuve du thm 6 : Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ sont indép.,

$Z = X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

preuve : - Espace image de Z : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ puisque

Agro écrit

X_1 et X_2 prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$.

- Calcul de $P(Z=n)$.

D'après le thm 4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k, X_2=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k) P(X_2=n-k) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \quad \text{par linéarité.}$$

$$\boxed{P(Z=n) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1+\lambda_2)^n} \quad \text{par la formule du binôme.}$$

$$Z \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Algo :

En déduire que le résultat est vrai pour n variables $X_1, \dots, X_n$ où les X_i sont indép. et $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$

(à montrer : $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$)

preuve par récurrence :

initialisation : $n=2$. Fait juste avant.

Hérédité : je suppose que la stabilité par somme est vraie pour $n-1$ variables de Poisson.
je montre qu'elle est vraie pour n variables.

T5.4 $S_n = X_1 + \dots + X_n = \underbrace{(X_1 + \dots + X_{n-1})}_{\text{je l'appelle } S_{n-1}} + X_n$

- Par hypothèse de récurrence : $S_{n-1} \sim \mathcal{P}(\alpha)$ où $\alpha = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}$
- D'après le lemme des coalitions : X_n et S_{n-1} sont indép.
- D'après l'initialisation, $S_{n-1} + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \lambda_n$, c-à-d :

$$S_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

Conclusion : la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.