Exercices de TD

Classes de BCPST2

2025-2026

Table des matières

1 Nombres complexes - Trigonométrie

A. Exercices d'application directe du cours

■ **1.** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$

2. $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

3. $z_3 = \dfrac{1}{1+i}$

4. $z_4 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$

5. $z_5 = \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

■ **2.** Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z_1 = -2$

2. $z_2 = 3$

3. $z_3 = 4+4i$

4. $z_4 = \sqrt{3}-i$

5. $z_4 = -\dfrac{4}{3}i$

6. $z_5 = \cos\alpha \times e^{i\theta}, \quad \alpha \in]-\pi,\pi],\ \theta \in \mathbf{R}$

■ **3.** Soit $a = 1+i$ et $b = \sqrt{3}-i$.

1. Déterminer la forme exponentielle de a, b et ab.

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

■ **4.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $z = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n - \left(1-i\sqrt{3}\right)^n$. Mettre z sous forme exponentielle.

■ **5.** Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0.$$

■ **6.** Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Linéariser $S_4 = \cos^4\theta - \sin^4\theta$ et $S_3 = \cos^3\theta - \sin^3\theta$.

■ **7.** Développer $\cos 5t$ en fonction de $\cos t$.

B. Exercices classiques

■ **8.** Soit $j = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Mettre j sous forme exponentielle.

2. Calculer j^2 et j^3, puis $1+j+j^2$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(1+j)^{2n+1} = -j^{n+2}$.

■ **9.** Soit z_1 et z_2 deux complexes de module 1. Montrer que $Z = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel. Que dire de $Z' = \dfrac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}$?

■ **10.** **1.** Soit u et v sont deux nombres complexes. Montrer que : $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2\left(|u|^2+|v|^2\right)$.

2. Soit $u \in \mathbf{C}$ avec $u \neq -i$. Montrer l'équivalence :

$$\left|\frac{1+iu}{1-iu}\right| = 1 \iff u \in \mathbf{R}.$$

■ **11.** **1.** Calculer les arguments de $z = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2. Soit $\theta \in]-\pi/2,\pi/2]$. Calculer les arguments des nombres suivants :

$$z_+ = 1+e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_- = 1-e^{i\theta}.$$

■ **12.** **Racines n-èmes de l'unité.**
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer les solutions de l'équation $z^n = 1$.

2. Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$ et le produit $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\omega^k$.

■ **13.** **1.** Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^4 = i$.

2. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $z^5 = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}{(1+i)^3}$.

Indication : on commencera par mettre le second membre de l'équation sous forme exponentielle, puis on cherchera les solutions sous forme exponentielle également.

■ **14.** Résoudre dans **C** l'équation

$$z^4 - 2z^2 \cos 2a + 1 = 0,$$

où a est un réel donné.

C. Autres exercices

■ **15.** Résoudre dans **R** l'équation

$$\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

■ **16.**

1. Soit $a \in]-\pi/2, \pi/2[$. Exprimer $\tan a$ en fonction de $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$.

2. Déterminer la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$.

3. Résoudre l'équation : $(\sqrt{2} - 1) \cos x + \sin x = -1$.

■ **17.**

1. Soit u un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.
Déterminer $|1+u|$, $|1-u|$, $\arg(1+u)$ et $\arg(1-u)$.

2. Soit n un entier naturel. Simplifier les nombres complexes suivants :

a) $(1 + \cos\theta + i \sin\theta)^n$,

b) $\left(\dfrac{1 + i \tan\theta}{1 - i \tan\theta}\right)^n$, où $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

■ **18.** Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.

1. Montrer que S_n est un réel.

2. Développer S_n.

3. Donner la forme exponentielle de S_n.

4. En déduire une expression simple de :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$$

2 Fonctions de la variable réelle

A. Limites - équivalents

■ **19.** Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes au point a indiqué puis étudier l'existence d'une limite en ce point :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{\tan x}, \quad a = 0.$

2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{(\pi - x)^2}, \quad a = \pi/4.$

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+2x-3}, a \in \{1, 2, +\infty\}.$

4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$ $a = +\infty$.

5. $f_5 : x \mapsto \sin(1-\cos x), \quad a = 0.$

6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{e^x}, \quad a = +\infty.$

B. Prolongement par continuité

■ **20.** Soit f la fonction définie sur $[-4, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 8 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f.

C. Dérivabilité

■ **21.** Déterminer l'ensemble de définition et étudier la dérivabilité de la fonction définie par $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

■ **22.** Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f : x \longmapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1. Montrer que f définit une bijection de $\mathbf{R}$ dans un intervalle I à déterminer.

2. Donner les propriétés de f^{-1} et montrer que f^{-1} est dérivable sur I.

3. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

■ **23.** On considère la fonction ch définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

1. Montrer que la fonction ch est bijective et dérivable sur son domaine de définition.

2. Étudier la dérivabilité de sa bijection réciproque.

D. Développements limités

■ **24.** Donner un $\mathrm{DL}_2(0)$ de : $f_1(x) = \ln(1+\sin(3x)))$.

■ **25.** Donner un $\mathrm{DL}_2(0)$ de : $f_2(x) = \sqrt[3]{1+x} - \cos(2x)$.

■ **26.** Donner un $\mathrm{DL}_1(0)$ de : $f_3(x) = \dfrac{\ln(1+\sin(3x)))}{\sqrt[3]{1+x}-\cos(2x)}$.

E. Études complètes

■ **27.** Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{\sqrt{x^2-1}}$$

1. Étude générale : dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f_n.

b) La fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 1.

c) Déterminer, selon la parité de n, si la fonction f_n est prolongeable par continuité en -1.

d) Déterminer, selon les valeurs de n, la limite de f_n en $+\infty$.

e) Déterminer, selon les valeurs de n, la limite de f_n en $-\infty$.

f) Sur quel ensemble peut-on garantir la dérivabilité de f_n ? Déterminer f_n' sur cet ensemble.

2. Étude de f_1.

a) Vérifier que f_1 définit une bijection de $[1, +\infty[$ vers un ensemble I_1 à préciser, et une bijection de $]-\infty, -1[$ vers un ensemble I_2 à préciser.

b) Préciser, en fonction du réel a, le nombre de solutions de l'équation $f_1(x) = a$.

c) Déterminer la bijection réciproque de f_1 sur $[1, +\infty[$.

3 Calcul intégral - Équations différentielles

A. Calculs d'intégrales

■ **28.** **1.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$, *poser* $u=e^x$ *et trouver deux réels* a,b *tels que* $\dfrac{u-1}{u(u+1)}=\dfrac{a}{u}+\dfrac{b}{u+1}$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\,dt$, *inspirez-vous du précédent*

4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx$, *intégration par parties*

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, *trinôme sous forme canonique*

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin(3x)\,dx$, *intégrations par parties*

7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, *poser* $x=\cos t$

■ **29.** **Intégrales de Wallis**
On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall\, n\in\mathbf{N},\quad I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\,dx.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

3. Montrer que : $\forall n\in\mathbf{N},\ (n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$.

4. Vérifier que la suite $(n\,I_n\,I_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante.

5. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

B. Fonctions définies par une intégrale

■ **30.** Soit F la fonction définie par :

$$x\mapsto \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t^4+t^2+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.

2. Étudier la parité de F.

3. Construire le tableau de variations de F.

4. **a)** Montrer que pour tout réel t non nul,

$$0\leqslant\frac{1}{1+t^2+t^4}\leqslant\frac{1}{t^2}.$$

b) Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de F.

5. Calculer $F'(0)$ et tracer la courbe représentative de F.

■ **31.** Pour $t\in\mathbf{R}^*$, on pose $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$ et pour x réel, on pose :

$$F(x)=\int_x^{3x} f(t)\,dt.$$

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$. Étudier les variations de la fonction F.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

3. On pose $g(t)=\frac{e^t-1}{t}$ pour $t\in\mathbf{R}^*$.
Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

4. En écrivant que $f(t)=\big(f(t)-g(t)\big)+g(t)$, montrer que F se prolonge par continuité en 0.

C. Équations différentielles

■ **32.** Résoudre sur $I=]-\pi/2,\pi/2[$ l'équation :

$$y'\cos^3 x=-2y\sin x$$

■ **33.** Résoudre l'équation différentielle suivante sur les intervalles $I=]-\infty,-1[$, $J=]-1,1[$ et $K=]1,+\infty[$:

$$(1-x^2)\,y'-2y+x+1=0$$

■ **34.** Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$x\,y' + y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Existe-t-il des solutions sur $\mathbf{R}$?

■ **35.** Résoudre $\mathbf{R}$ les équations suivantes, et dans chaque cas déterminer dans chacun des cas la solution vérifiant de plus $y(0) = y'(0) = 0$:

1. $y'' - 3\,y' + 2\,y = -x - 1$
2. $y'' - 2y' + 5y = 3 + \sin(2x)$
3. $y'' - 4\,y' + 4\,y = 3xe^{2x}$ (on cherchera une solution particulière de la forme $x \mapsto (\alpha x^3 + \beta x^2)e^{2x}$).
4. $y'' + y = \sin^3 x$

■ **36.** On considère l'équation :

$$x^2 y'' - 2y = \frac{1}{x} + \ln x$$

Utiliser le changement de variable $x = e^t$ pour résoudre l'équation.

■ **37.** On considère l'équation suivante :

$$x^2\,y'' + 4x\,y' + 2\,y = 1$$

Faire le changement de fonction $z = x^2\,y$ pour résoudre l'équation sur $\mathbf{R}_+^*$.

■ **38.** On considère l'équation :

$$(x-1)\,y'' - y' - x\,y = 0 \quad (E)$$

1. Chercher une solution particulière sous la forme $f(x) = e^{ax}$.
2. En faisant le changement de fonction inconnue $y = f \times z$, déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $]1; +\infty[$.

■ **39.** Soient a et b deux réels.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y = ax + b \ \ (E_1).$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = a\,|x| + b \ \ (E_2)$.

4 Suites numériques

A. Exercices d'application directe du cours

■ **40.** Donner un équivalent simple des suites de terme général suivant, ainsi que leur limite le cas échéant :

1. $u_n = e^{n+1} - n^2$.
2. $u_n = \ln\left(e^n - n^2\right)$.
3. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{e^n}\right)^n$,
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
5. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln n}$,
6. $u_n = n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$,

■ **41.** Établir l'existence et calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+n}{n^2+kn+k^2}.$$

B. Exercices classiques

■ **42.** Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$$

1. Vérifier que pour tout entier n, $u_n > 0$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

■ **43.** Étudier en fonction du premier terme u_0 la suite suivante définie par :

$$u_0 \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2.$$

■ **44.** On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$u_0 \in \mathbf{R} \quad \text{et :} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{1+{u_n}^2}}.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$.

1. Vérifier que pour tout entier n non nul, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution notée a, et vérifier que $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que pour tout x dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
4. Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{4}\,|u_n - a|.$$
En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

■ **45.** De la même manière que précédemment, étudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 > -2 \\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}. \end{cases}$$

■ **46.**

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$
est monotone et bornée. Conclusion ?
3. En déduire un équivalent de $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

■ **47.** Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée α_n. Préciser la limite de la suite $(\alpha_n)_n$.
2. **a)** Démontrer que $\alpha_n \geqslant e^n$.

b) Démontrer que $\alpha_n \underset{\infty}{\sim} e^n$.

■ **48.** Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = x - n\ln x.$$

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation

$$f_n(x) = 0 \qquad (E_n)$$

admet deux solutions notées u_n et v_n vérifiant $1 < u_n < n < v_n$. Préciser la limite de la suite (v_n).

2. Pour tout entier $n \geqslant 3$, étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$, puis en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
3. Justifier de la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ admet pour limite 1.
5. Trouver un équivalent simple de $u_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

■ **49.** On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
Que peut-on en conclure pour la suite u ?
2. Démontrer que :

$$\forall x \neq -1, \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

En intégrant cette égalité entre 0 et 1, démontrer que u converge vers $\ln 2$.

C. Autre exercice

■ **50.** On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par la condition $0 < u_0 \leqslant v_0$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune.

On pourra commencer par montrer $0 < u_n \leqslant v_n$ *pour tout entier naturel* n.

5 Modèles de dynamique des populations

■ **51.** L'évolution de l'effectif d'une population donnée est décrite par le modèle suivant :

$$\begin{cases} P_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+1} = \dfrac{K_0 P_n}{P_n + K}. \end{cases}$$

où P_n est l'effectif de la population étudiée à la date n, K_0 et K sont deux réels strictement positifs qui ne dépendent pas de n tels que $K_0 < K$.

1. Montrer que $P_n > 0$ pour tout entier naturel n.

2. Montrer que $Q_n = 1/P_n$ est le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

3. En calculant la forme explicite de Q_n, déterminer le comportement de P_n à l'infini.
Interpréter les résultats précédents en termes d'évolution de la population.

■ **52. Étude de la dynamique d'une population de cerfs.**
Soit μ et K deux nombres réels tels que $0 < \mu < 1$ et $K > 0$. Selon le modèle de Ricker, l'évolution de la population de cerfs peut être décrite par la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{N} \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} = x_n e^{\mu(1-x_n/K)}. \end{cases}$$

1. On pose pour x réel : $f(x) = x e^{\mu(1-x/K)}$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet 2 solutions notées α et β ($\alpha < \beta$).
Que peut-on dire de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si $x_0 = \alpha$? Si $x_0 = \beta$?
Que représentent concrètement α et β pour les populations de cerfs ?

b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

c) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \geqslant 0$.

2. On suppose dans cette question que $x_0 \in \,]0, K[$.

a) Programmer en `Python` une fonction `X(n,x0,mu,K)` prenant en entrée un entier n, des flottants x_0, μ, K et renvoyant en sortie la liste $[x_0, \ldots, x_n]$ des termes de la suite (x_n) correspondante au choix de ces paramètres.

b) Faire plusieurs essais de la fonction X avec $K = 1000$ en faisant varier les valeurs de x_0 et μ.

c) Faire une conjecture sur le sens de variations et la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

d) Déterminer les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

e) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

3. Mêmes questions qu'en 2. avec $x_0 \in [K, K/\mu]$.

4. Dans cette question, on suppose que $x_0 \in [K/\mu, +\infty[$.

a) Conjecturer le sens de variations et la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

b) Montrer qu'il existe un unique $\gamma \in [K/\mu, +\infty[$ tel que $f(\gamma) = K$.

c) Étudier alors la convergence de la suite (x_n).

5. On revient au cas de la question 3. Écrire en Python le script d'une fonction qui prend en entrée x_0, K, μ et renvoie le plus petit entier tel que $x_n \geqslant K/2$.

■ **53. Modèle de Johnson-Schumacher.**
Soit r et K deux réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(JS) \qquad y' = ry\left(\ln \frac{y}{K}\right)^2$$

1. Calculer les solutions constantes de (JS).

2. Soit y une solution non constante de (JS), définie sur un intervalle I contenant 0 telle que $y(0) = y_0 \in \,]0, K[$ et ne prenant jamais les valeurs 0 et K sur I.

a) Montrer que : $\forall t \in I \quad 0 < y(t) < K$.

b) Déterminer y et I.

3. Soit $y_0 \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{K\}$. Déterminer la solution de (JS) vérifiant $y(0) = y_0$.

4. Représenter graphiquement les solutions pour quelques valeurs de y_0 ainsi que les solutions constantes de (JS).

6 Polynômes

■ **54.** Factoriser les polynômes :

1. $P = X^4 + 4$,
2. $Q = X^4 + X^2 + 1$,
3. $R = 2X^3 - 14X + 12$.

■ **55.** Soit θ un réel n un entier naturel non nul, $P = X^2 - 2\cos\theta \cdot X + 1$, et $Q = X^{2n} - 2\cos(n\theta) \cdot X^n + 1$.
Montrer que Q se factorise par P.

■ **56.** On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{C}[X]$ par la donnée de $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+2} = X\,P_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer le terme dominant du polynôme P_n.
2. Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :
$$P_n\Big(z + \frac{1}{z}\Big) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, le réel $\alpha_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\,\frac{\pi}{n}\right)$ est racine de P_n. Ces racines sont-elles deux à deux distinctes ? Que peut-on en conclure ?

■ **57.** Soit $n \geq 2$ un entier. Factoriser sur $\mathbf{C}$ le polynôme $P = (X+i)^n - (X-i)^n$.
Indication : déterminer les racines en résolvant tout d'abord l'équation $Z^n = 1$ et justifier comment s'y ramener par un choix de Z à préciser.

■ **58.**

1. Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2, à coefficients réels et dont les racines sont toutes réelles et simples :
$$P = a\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)$$
où $a \neq 0$, $p \geqslant 2$ et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$.
Montrer que P' a également toutes ses racines réelles et simples. *Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle sur des intervalles bien choisis.*
2. Soit P un polynôme non nul de degré supérieur ou égal à 2, à coefficients réels et dont les racines sont toutes réelles :
$$P = a\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)^{m_k}$$
où $a \neq 0$, $p \geqslant 2$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ et $m_1, \ldots, m_p \in \mathbf{N}^*$.
   - **a)** Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, P' se factorise par $(X - \alpha_k)^{m_k - 1}$.
   - **b)** Montrer alors que P' a également toutes ses racines réelles.

7 Espaces vectoriels

■ **59.** Quels sont les espaces vectoriels parmi les ensembles suivants ?

1. E_1 : ensemble des solutions de l'équation différentielle $x\,y'' + (x^2+1)\,y' + 3\,y = 0$

2. E_2 : ensemble des solutions de l'équation différentielle $(x^2-1)\,y' - 2x\,y = x\,e^x$

3. $E_3 = \{P \in \mathbf{R}[X] \quad P(1) = 0\}$.

■ **60.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} -2x - y + 5z = 1 \\ x - 2y - t = 2 \\ -x + y + z + u = 1 \end{cases}$

2. Soit $m \in \mathbf{R}$ un paramètre fixé :
$$\begin{cases} mx - y + mz = 1 \\ x - y + z + t = m \\ x + (m-2)y + mz + t = 1 \end{cases}$$

■ **61.** Les familles de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivantes sont-elles libres ?

1. $u = (-1,3,2)$, $v = (1,-1,-3)$.

2. $u = (-1,0,1)$, $v = (0,1,-1)$, $w = (-1,1,0)$.

3. $u = (1,1,1)$, $v = (-1,1,1)$, $w = (1,-1,1)$.

4. $u = (1,-1,-1)$, $v = (1,2,1)$, $w = (3,-1,1)$, et $x = (2,-1,1)$.

■ **62.** Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4;\ \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ x + 2t = 0 \end{cases}\right\} \\ F &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4;\ 3x - 2y + z = 0\right\} \\ G &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 3x - 2y = z = -x + y\right\} \end{aligned}$$

■ **63.** Soit les vecteurs $u_1 = (2,1,-1)$, $u_2 = (2,-1,1)$ et $u_3 = (3,0,1)$ dans $\mathbf{R}^3$.
Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$.
Quelles sont les coordonnées de $(2,-1,1)$ et $(1,2,-1)$ dans $\mathscr{B}$?

■ **64.** Soit les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants : $u_1 = (0,3,-2)$, $u_2 = (1,1,-1)$ et $u_3 = (3,-3,1)$.
On note :
$$E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \quad \text{et} \quad D = \left\{(a,a,a) \quad a \in \mathbf{R}\right\}.$$

1. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ?

2. Déterminer une base et une équation cartésienne de E.

3. Montrer que la juxtaposition d'une base de E et d'une base de D forme une base de $\mathbf{R}^3$.

■ **65.** Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$\begin{aligned} u &= (1,0,0,1), & v &= (2,1,-1,0) \\ w &= (3,1,-1,1), & x &= (5,2,-2,1) \end{aligned}$$

Montrer que $\mathrm{Vect}\,(u,v) = \mathrm{Vect}\,(w,x)$.

■ **66.** Montrer que l'ensemble E des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4\,y = 0$ est un espace vectoriel. En donner une base et la dimension.

■ **67.** Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$

1. Montrer que la famille constituée des polynômes $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 - 1 + X + X^2$ et $P_3 = 1 - X + X^2$ est une base de E.

2. Étant donné $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, quelles sont les coordonnées de $P(X) = a + bX + cX^2$ relativement à cette base ?

■ **68.** On considère l'ensemble E des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbf{K})$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 2a+b & 3b-5c & a \\ -b & a+b-c & a-2c \\ c & b+c & 2b-c \end{pmatrix}$$

où $(a,b,c) \in \mathbf{K}^3$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et en donner une base et la dimension.

■ **69.** Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ on considère les matrices A, B, C, D suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Montrer que la famille (A,B,C,D) est une base de E et donner les coordonnées d'une matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ quelconque dans cette base.

■ **70.** On considère l'ensemble E suivant :

$$E = \left\{P \in \mathbf{R}_3[X];\ P(0) = P'(0) = P(1) = 0\right\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et préciser sa dimension.
3. Montrer que la juxtaposition de la base de E trouvée précédemment et de la famille

$$\mathscr{F} = (1 + X, 1 - X^2, 1 + X^3)$$

est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

8 Séries numériques réelles

A. Exercices d'application directe du cours

■ **71.** Calculer les sommes suivantes (déterminer si besoin les réels x pour lesquels la série converge).

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$ rép : $-\dfrac{2}{5}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^{2n}$ rép : $\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^3}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}n(n+1)$ rép : $-\dfrac{36}{125}$
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(2+(-1)^n\right)3^{-n}$ rép : $\dfrac{5}{12}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-n+1}{n!}x^n$ rép : $(1+x^2)e^x$

■ **72.** Soit un réel x. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(nx)}{2^n}$.

■ **73.** On pose pour tout entier nature non nul :

$$u_n=\frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Trouver rois réels a,b,c indépendants de n tels que : $\forall n\geqslant 1\quad u_n=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+2}$.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ et calculer le cas échéant sa somme.

B. Exercices classiques

■ **74.** 1. Pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k=\int_0^1\frac{x^k}{1+x^2}\,dx$$

Montrer que $I_k\leqslant\dfrac{1}{k+1}$ et calculer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}I_k$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Vérifier que $u_n=(-1)^n\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,dx$.

3. Démontrer la convergence de la série de terme général u_n en exprimant ses sommes partielles à l'aide des termes de (I_n), et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n$.

■ **75.** 1. Soit $x\in[-1,1[$ un réel. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*\quad \ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

2. En déduire que après avoir établi l'existence des sommes :

$$\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

■ **76.** 1. Montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$:

$$\frac{1}{n\ln n}\geqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n}$.
3. Donner un équivalent des sommes partielles de cette dernière série.

9 Théorie basique des probabilités

A. Révisions : univers finis

77. Une machine produit des pièces dont une sur cent est défaillante. Un testeur indique une pièce effectivement défaillante avec une probabilité $0,9$ et il indique correcte une pièce correcte avec une probabilité $0,8$.

Calculer la probabilité qu'une pièce tirée au hasard et testée défaillante le soit vraiment.

78. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère n urnes numérotées de $U_1, \dots, U_n$. Pour tout entier k dans $\{1, \dots, n\}$, on suppose que l'urne U_k contient n boules noires et $2k$ boules blanches. Ensuite, on choisit au hasard une urne et on tire de cette urne une boule.

1. Calculer la probabilité p_n d'obtenir une boule blanche. *On exprimera le résultat sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.*
2. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\geq 2}$.

79. Soit α, β deux entiers naturels non nuls. On considère une urne $\mathscr{U}$ contenant α boules blanches et β boules noires, et une urne $\mathscr{V}$ contenant β boules blanches et α boules noires. On choisit une urne puis on tire une boule :

— si elle est blanche on la remet dans l'urne et on tire la suivante dans $\mathscr{U}$,

— si elle est noire on la remet dans l'urne et on tire la suivante dans $\mathscr{V}$.

On note U_n l'évènement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne $\mathscr{U}$ », V_n l'évènement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne $\mathscr{V}$ » et B_n l'évènement « le n-ième tirage apporte une boule blanche ».

1. Calculer $P_{U_n}(B_n)$, $P_{V_n}(B_n)$, $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.
2. On pose $p_n = P(B_n)$. Donner une relation entre p_{n+1} et p_n.
3. En déduire p_n si le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathscr{U}$, et si il est dans l'urne $\mathscr{V}$.
4. Calculer la limite de la suite $(p_n)_n$.

80. Soit $N \geqslant 2$ un entier. Quelle est la probabilité p_N d'obtenir un nombre pair d'as lorsque l'on lance N fois de suite un dé équilibré ?

B. Univers infinis

81. On effectue une suite infinie de lancers de dés. Pour $k \in \mathbf{N}^\star$, on note A_k l'événement « On obtient l'as au lancer numéro k ».

1. Exprimer en langue française (et sans vocabulaire mathématique) les événements suivants :

   (a) $E_1 = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k$ (b) $E_2 = \left(\bigcap_{k=1}^{4} \overline{A_k}\right) \cap \left(\bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k\right)$ (c) $E_3 = \bigcup_{k>4} A_k$
2. Soit $n > 0$. Écrire à l'aide des événements A_k l'événement E_n : « On obtient au moins une fois l'as après le $n$ème lancer ».
3. On pose pour tout entier $n > 0$: $C_n = \bigcup_{k>n} A_k$. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$ pour tout entier $n > 0$.
4. Traduire en français l'évènement $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$.
5. Écrire avec les A_k les évènements suivants :

   a) B_n : «À partir du $n$ème lancer, on n'a plus que des as».

   b) B : à partir d'un certain lancer, on n'a plus que des as. On pourra passer par les évènements B_n.

82. On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. On lance cette pièce jusqu'à l'apparition du premier pile. On note, pour tout entier $k > 0$, F_k l'événement « le k-ème lancer donne face » et S_k l'événement « le premier pile est obtenu au lancer k ».

1. On note aussi E_1 : « le premier pile est obtenu après le 5ème lancer » et E_2 :

« pile n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers ».

a) Écrire les événements E_1 et E_2 à l'aide des F_k, S_k et $\overline{F_k}$, $\overline{S_k}$.

b) Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$. A-t-on $E_1 = E_2$?

2. On dispose d'une infinité d'urnes $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'urne U_n contient n boules dont une boule blanche exactement. Si le premier pile apparaît au lancer $k \in \mathbf{N}^*$, on tire une boule dans l'urne U_k. On pose B l'événement « on obtient une boule blanche ».
Calculer $P(B)$.

10 Diagonalisation des matrices carrées

A. Résultat classique

■ **83.** Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, λ une valeur propre de M et U un vecteur propre associé.

1. Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer $M^k U$ en fonction de λ, U et k. Rappel : $M^0 = I_n$.
2. Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} q_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$. Notons $Q(M)$ la matrice $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} q_k M^k$.
   a) Exprimer le vecteur $Q(M)U$ en fonction de Q, λ et U.
   b) En déduire que si $Q(M)$ est la matrice nulle, et si λ est une valeur propre de M, alors λ est une racine du polynôme Q.

B. Applications directes du cours

■ **84.** Calculer le spectre des matrices A suivantes, étudier leur éventuelle diagonalisabilité et, le cas échéant, donner une matrice P inversible diagonalisant A.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

■ **85.** Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M^2 - 3M + 2I_3$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de M (*s'inspirer de l'exercice 1*).
3. M est-elle diagonalisable ?

C. Applications de la diagonalisation

■ **86.** On définit trois suites par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -5u_n + 6v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n - 3w_n \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad X_{n+1} = AX_n.$$
2. Diagonaliser A et préciser la matrice de passage P et le produit matriciel $P^{-1}AP$ (utiliser **Ex. 5**).
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer A^n.
4. Déterminer u_n, v_n, w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0 pour tout entier n.

■ **87.** Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. (voir **Ex. 5.**)
2. On considère le système différentiel, d'inconnues les fonctions x, y, z de la variable t définies sur $\mathbf{R}$ et donné par :

$$(S) \qquad \begin{cases} x' &=& x + 3y + 2z \\ y' &=& -2y - 2z \\ z' &=& -3x + 9y + 8z \end{cases}$$

a) On définit des fonctions u, v, w par :

$$Y = P^{-1}X \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

b) Écrire le système différentiel vérifié par u, v, w et en déduire les solutions de (S)

■ **88.** Le Grand Méchant Loup mange dans trois alpages A, B et C. Il ne mange jamais dans le même alpage deux jours d'affilée. S'il mange dans A, il mangera dans B le jour suivant. S'il mange dans B ou C, le lendemain il mangera dans A avec une probabilité deux fois plus grande qu'en C ou B.

On note a_n, b_n, c_n les probabilités que le Loup se trouve respectivement dans les alpages A, B, C après n jours. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M une matrice carrée d'ordre 3 telle que $X_{n+1} = M X_n$.

2. Déterminer les valeurs propres de M et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

3. Vérifier que M est diagonalisable.

On note $b = (V_1, V_2, V_3)$ une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de M.

On suppose que $X_0 = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$ où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{R}^3$ (on ne demande pas de calculer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$).

Calculer $M^n X_0$ en fonction de n et de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, V_1, V_2, V_3$.

4. En remarquant $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer la limite des probabilités a_n, b_n, c_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quel est l'alpage le plus sûr pour le Petit Chaperon Rouge ?

11 Variables aléatoires réelles discrètes

A. Exercices d'application du cours

■ **89.** Soit $p \in]0,1[$. Une machine fabrique des pièces sans défaut avec la probabilité p. Ces pièces sont contrôlées au fur et à mesure. Dès que l'on obtient une pièce défectueuse, on arrête la machine. Soit N le nombre de pièces fabriquées sans défaut. Déterminer la loi de N, puis calculer son espérance et sa variance.

■ **90.** On dispose d'un dé équilibré et d'une urne contenant une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé : à chaque fois que l'on obtient un résultat différent de 6, on ajoute une boule rouge dans l'urne et effectue un nouveau tirage. Si on obtient un 6, on extrait une boule de l'urne, puis l'expérience s'arrête.

On note X la variable aléatoire égale au rang auquel on obtient le 6 et Y la variable aléatoire égale à 1 si on extrait une boule blanche et 0 sinon.

1. **a)** Déterminer la loi de X.

b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?

2. Calculer la loi de Y.
On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

B. Variables finies

■ **91.** Soit n et N deux entiers naturels non nuls. On répartit au hasard n tickets de tombola entre N personnes dont Alice. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tickets reçus par Alice.

Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de X.

■ **92.** On dispose de $2n$ jetons dont n jetons sont numérotées de 1 à n, et n jetons ne sont pas numérotées. On extrait un jeton : s'il est numéroté on arrête, sinon on le remet dans l'urne et on tire à nouveau un jeton suivant le même protocole, tout en effectuant au maximum n tirages.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de jetons non numérotés extraits.

2. Calculer l'espérance de X.

■ **93.** On dispose de $(2n+1)$ jetons dont une face est noire et l'autre blanche. Ensuite, on lance simultanément les $(2n+1)$ jetons. On obtient un nombre pair de jetons dont la face apparente est de couleur donnée et un nombre impair de jetons dont la face apparente est de l'autre couleur.
Soit X la variable aléatoire égale à ce nombre impair.

1. Donner la loi de X et vérifier que X est bien une variable aléatoire.

2. Calculer l'espérance de X.

C. Exercices classiques

■ **94.** Un sauteur de haies saute successivement une infinité de hauteurs numérotées $1, 2 \ldots n, \ldots$. La probabilité de sauter avec succès la hauteur n est $1/n$. On note X le nombre de haies sautées avec succès.

1. Déterminer la loi de X et vérifier que l'on a bien :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = 1.$$

2. **a)** Calculer $E(X+1)$ et $E\big((X+1)(X-1)\big)$.

b) En déduire l'espérance et la variance de X.

■ **95.** Une particule est astreinte à se déplacer sur un axe gradué par saut d'une unité. Pour $k \in \mathbb{Z}$, la particule passe des abscisses k à $k+1$ avec la probabilité $p \in]0,1[$ et de k à $k-1$ avec la probabilité $q = 1-p$. Elle démarre de l'origine 0.

1. Quelle est la probabilité de revenir au point d'origine après dix sauts ?
Quelle est la probabilité d'être à deux pas de l'origine après dix sauts ?

2. La particule s'arrête désormais lorsqu'elle effectue deux sauts successifs dans le même sens. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de sauts effectués avant qu'elle ne s'arrête. Calculer sa moyenne.

■ **96.** Soit X une variables aléatoire de loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbf{N}$. Un compteur indique la loi de X, mais il est détraqué : si X prend une valeur inférieure ou égale à N, il affiche bien cette valeur, mais sinon il affiche un nombre entier au hasard entre 0 et N. On appelle Y la variable aléatoire affichée. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

■ **97.** Soit X une variable de Poisson de paramètre λ.
Comparer les probabilités des évènements « X est pair » et « X est impair ».

D. Autre exercice

■ **98.** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtenir une boule dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule précédemment extraite.
On note X_n le nombre de tirages effectués.

1. Calculer $P(X_n > j)$ pour $j \in \mathbf{N}$ et en déduire $P(X_n = j)$ pour $j \in \mathbf{N}$.
2. Calculer leur limite quand n tend vers $+\infty$.

12 Intégrales généralisées

A. Exercices d'application du cours

■ **99.** Établir la convergence et Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$ *rép :* $\frac{1}{2}$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\arctan x|}{1+x^2}\,dx$ *rép :* $\frac{\pi^2}{4}$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$ *rép :* $\frac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$
   (*indication : effectuer une ipp puis poser* $t = x^2$)
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$
   (poser $t = \sqrt{1-x}$) *rép :* $4(\ln 2 - 1)$

B. Exercices classiques

■ **100.** Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}$ et :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n\,e^{-ax}\,dx$$

1. Montrer que les intégrales convergent pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

■ **101.** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(n+x)^2}\,dx$.

1. Montrer que I_n converge.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que J_n converge et que $I_n = \dfrac{1}{n} - J_n$.
   En déduire que $I_n \sim \dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

■ **102.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

1. Étudier la convergence de l'intégrale I_n pour tout entier naturel n non nul.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $I_n - I_{n+1}$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Exprimer I_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
4. Étudier l'intégrale J_n pour tout entier naturel n non nul.

■ **103.** On pose

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx.$$

1. Étudier l'existence de l'intégrale I_n pour tout entier naturel n.
2. Calculer $I_{n+1} - I_n$ pour tout entier naturel n.
3. Exprimer I_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

■ **104.** On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin x\big)\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\cos x\big)\,dx.$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(x)\,dx$ est convergente.
2. Soit g la fonction définie sur $]0, \pi/2]$ par :
   $g(x) = \ln\big(\sin x\big) - \ln x$.
   Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$ puis celle de I.
3. **a)** Calculer $I+J$ de deux manières différentes et montrer que $I + J = -\pi\ln(2)$.
   On pourra effectuer dans J le changement de variables $t = x + \pi/2$.
   b) Montrer que $I = J$ et en déduire que $I = J = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

13 Variables aléatoires à densité

A. Exercices d'application du cours

■ 105. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On note $Y = \min(X_1, X_2)$.
   Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de probabilité de Y.

■ 106. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{-x^2/2} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   a) Reconnaître la loi de $Y = X^2$.
   b) Donner l'espérance et la variance de Y.

■ 107. Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$ dans le cas où X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Si elles existent, calculer l'espérance et la variance de Y.

■ 108. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale centrée réduite et $Z = 1 - 2X$.
Déterminer la loi de Z.

B. Exercices classiques

■ 109. Soit $\alpha > 0$ et la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Admet-elle une espérance ?
   On fixe désormais $\alpha = 1$.
2. Montrer que $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$. Qu'en est-il si $x < 0$?
3. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité f.
   Donner un équivalent simple de $P(X > x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $Z_n = \frac{1}{n}\max(X_1, \ldots, X_n)$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et suivent la même loi que X. Soit F_{Z_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire Z_n.
   Étant donné $x \in \mathbf{R}$, déterminer $F_{Z_n}(x)$ puis calculer la limite de $F_{Z_n}(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

■ 110. Soit $b > 0$. On définit une fonction g sur $\mathbf{R}$ en posant

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{b}{2^t} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la constante b pour que g soit une densité d'une variable aléatoire X.
2. Reconnaître la loi de $Y = X - 1$.
   En déduire que X possède une espérance et une variance, et les déterminer.
3. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de X. Déterminer la loi de Z.

■ 111. Soit $p \in]0,1[$, et $a < b$ deux réels strictement positifs. Une boite contient deux ampoules A et B indiscernables mais dont les durées d'éclairement suivent une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b. On tire au hasard une ampoule de la boite, la probabilité que A soit choisie étant égale à p. On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'ampoule issue de ce protocole.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance et sa variance.

■ 112. Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, a]$.
On définit les variables aléatoires $Y = a - X$, $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de Y. Calculer son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de U. Calculer son espérance et sa variance.

3. Déterminer la variable aléatoire $U+V$, puis la loi, l'espérance et la variance de V.

■ **113.** On note f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x(x+1)} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer C pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X}$?

4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Z définie par

$$Z = X - \lfloor X \rfloor,$$

$\lfloor X \rfloor$ désignant la partie entière de X.

Comparer les lois de Y et Z.

■ **114.** Soit la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

1. Montrer que la F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X à densité.

2. Comparer les lois de X et de $-X$.

3. On pose $Y = \dfrac{e^X+1}{e^X-1}$.

Trouver $Y(\Omega)$ et déterminer la loi de Y.

Les exercices suivants utilisent la formule de convolution :
Si X et Y sont des variables aléatoires à densité indépendantes, alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{X+Y} est donnée par :

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\,\mathrm{d}t.$$

■ **115.** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathscr{U}(0,1)$ et $\mathscr{U}(0,2)$.

Déterminer la loi de $X+Y$. Calculer son espérance et sa variance.

■ **116.** Soit $\lambda > 0$ un réel, et X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer une densité de $-X$, puis une une densité de $X-Y$ par convolution.

2. Vérifier que $Z = |X-Y|$ suit une loi exponentielle.

14 Applications linéaires entre espaces vectoriels - Diagonalisaton des endomorphismes

A. Exercices d'application du cours

■ **117.** Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_2 - e_3, \quad f(e_2) = -2e_2 + 2e_3,$$

$$f(e_3) = e_1 + e_4, \quad f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique.

2. Déterminer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ (bases et dimensions attendues).

■ **118.** Soit un réel m et $f_m : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ définie par

$$f_m(x, y, z) = (t, u, v, w).$$

où $t = x + (m-1)y$, $u = 2x - 2y + 2mz$, $v = y - 4z$ et $w = 2mz$.

1. Justifier que f_m est linéaire.

2. Donner la matrice A_m de f_m dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$.

3. Déterminer le noyau et l'image de f_m suivant la valeur du réel m.

4. Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles f_m est injective ? surjective ? un isomorphisme ?

■ **119.** On considère l'application f définie par :

$$f(P) = P - (X+1)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

2. Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

B. Exercices classiques

■ **120.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$\varphi : M \mapsto AM - MA.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

3. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ? Déterminer $\mathrm{Im}\varphi$ et $\mathrm{Ker}\varphi$.

4. Que peut-on dire de φ^2 et de φ^3 ?

■ **121.** Soit l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ et soit $D : E \to E$ l'application définie par :

$$\forall f \in E \quad D(f) = f'.$$

1. Justifier que D est un endomorphisme de E. Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ?

2. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ x \mapsto (ax+b)e^x + (cx+d)e^{2x} \;\middle|\; (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \right\}$$

a) Montrer que F est un espace vectoriel dont on en donnera une base $\mathscr{B}$ et la dimension.

b) Montrer que la restriction D_F de D à F, c'est-à-dire, l'application définie sur F par $\forall f \in F$, $D_F(f) = f'$, est un endomorphisme de F.

c) Donner la matrice de D_F dans la base $\mathscr{B}$.

d) Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ?

C. Diagonalisation

■ **122.** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M &\longmapsto AM \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

■ **123.** Soit $n \in \mathbf{N}$, et g l'application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$, par :

$$g(P) = (X-1)P' - P.$$

1. Justifier que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme $P_k = (X-1)^k$.
   a) Calculer $g(P_k)$.
   b) En déduire que g est diagonalisable.
3. L'endomorphisme g est-il un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$?

■ **124.** Soit $n \in \mathbf{N}$, et $E = \mathbf{K}_n[X]$. Pour tout polynôme P de E on définit le polynôme $u(P)$ par :

$$u(P) = (X^2 - 1)\, P''.$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

D. Autre exercice

■ **125.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour toute fonction f de E on définit une fonction notée $T(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \big(T(f)\big)(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt.$$

1. Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, et donner sa fonction dérivée.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E puis que T est injectif.
3. a) En utilisant le fait que pour toute fonction f de E, $T(f)$ est dérivable si $f \in E$, justifier que T n'est pas surjectif.
   b) L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ?

15 Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

A. Exercices classiques

■ **126.** On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Sans calculs, justifier que A est diagonalisable.

2. Calculer les valeurs propres de A et donner les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

3. Donner des bases orthonormales des sous-espaces propres de A.

4. En déduire une matrice P inversible diagonalisant A.

5. Calculer P^{-1}.

6. On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exprimer B à l'aide de A et I_3. En déduire que B est diagonalisable.

■ **127.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^n$. On définit une application f sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad f(x) = \langle u, x \rangle v.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

2. **a)** Montrer que f est de rang 1.

b) En déduire la dimension de Ker.

c) Interpréter géométriquement $\operatorname{Ker} f$.

3. **a)** Montrer que tout vecteur propre de f qui n'est pas associé à la valeur propre 0 est dans $\operatorname{Im} f$.

b) Calculer $g = f \circ f$.

c) Montrer que g est nul si et seulement si $v \in \operatorname{Ker} f$.

d) En déduire que f est diagonalisable si et seulement si v et u ne sont pas orthogonaux.

4. En notant U, V respectivement les matrices de u et v sur la base canonique, écrire la matrice A de f en fonction de U et V.

5. Calculer A^2 et retrouver le résultat de la question **3.c)**

B. Autre exercice

■ **128.** Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz si x ou y est nul.

2. **a)** Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour les vecteurs x et y si et seulement si elle l'est pour les vecteurs $-x$ et y.

b) En déduire que l'on peut supposer que $\langle x, y \rangle \geqslant 0$.

3. On suppose que x et y sont non nuls et tels que $\langle x, y \rangle \geqslant 0$. On pose :

$$x' = \|x\| y \quad \text{et} \quad y' = \|y\| x.$$

a) Calculer les normes des vecteurs x' et y'.

b) Tracer les vecteurs x' et y' sur une figure.

c) On pose $\delta = \left\| x' - y' \right\|$. Indiquer δ sur la figure.

d) Développer δ^2, et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

16 Couples de variables aléatoires discrètes

A. Exercices d'application du cours

129. Soit $N \geqslant 1$ un entier naturel. Dans une petite ville proposant trois hôtels $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ et $\mathscr{H}_3$, N personnes choisissent un hôtel au hasard. Soit X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi de séjourner dans l'hôtel $\mathscr{H}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

1. Donner les lois de X_1, X_2 et X_3. Rappeler leurs espérance et variance.
2. Donner la loi de $X_1 + X_2$.
3. Calculer ses espérance et variance.
4. Calculer la covariance de X_1 et X_2.

130. Soit λ, μ deux réels strictement positifs. Au péage d'une autoroute, le nombre aléatoire X de véhicules dans le sens Paris-Province suit une loi de Poisson de paramètre λ, et dans l'autre sens, ce nombre aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre μ. On suppose les variables X et Y mutuellement indépendantes.

1. Soit Z le nombre total de véhicules passant au péage. Donner la loi de Z.
2. Soit k, n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
   Quelle est la probabilité que, sur n véhicules passant au péage, k viennent de Paris ?

131. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Deux urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de chaque urne. On note X et Y les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1. Calculer la loi du couple (X, Y).
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer leur espérance.

B. Exercices classiques

132. On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait deux jetons avec remise.

Calculer la loi de la somme des numéros tirés.

133. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi même loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

On pose $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Trouver les lois de Z et T, puis celle du couple (Z, T).
2. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

134. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Une machine distribue à Bob des dés équilibrés à p faces.
Le nombre de dés distribués est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
On note Y le nombre de 1 obtenus par Bob lorsqu'il lance ces dés.
Déterminer la loi de Y.

135. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit U, V les variables aléatoires définies par

$$U = |X - Y| \quad \text{et} \quad V = \min(X, Y).$$

1. Donner la loi du couple (U, V).
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

136. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $p \in [0, 1]$ un réel. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on note $Y_i = X_i X_{i+1}$ et on définit la variable S_n par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i.$$

1. Donner la loi de Y_i pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. En déduire l'espérance de S_n.
2. Développer ${S_n}^2$ puis calculer l'espérance de ${S_n}^2$.
3. En déduire la variance de S_n.

■ **137.** Une puce se déplace dans un repère orthonormé.
À l'instant 0, elle est à l'origine. À chaque instant, elle va soit vers le nord, soit vers le sud, soit vers l'est, soit vers l'ouest de façon équiprobable. Elle saute d'une unité à la fois.

On désigne par (X_n, Y_n) les coordonnées de la puce après n sauts.

1. Sans chercher à déterminer la loi, calculer l'espérance et la variance de X_n.
Utiliser les variables $E_n + O_n$ et $E_n - O_n$ après avoir défini les variables E_n et O_n.

2. Soit R_n la distance du point à l'origine après n sauts.
Calculer $E({R_n}^2)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

C. Autre exercice

■ **138.** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$, de même loi : $\forall\, k \in \mathbf{N}, \quad P(X=k) = pq^k \quad$ où $\quad p \in]0,1[$ et $\quad q = 1-p$.

1. Trouver la loi de $Z = X + Y$. Calculer son espérance et sa variance.

2. a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n-1+i}{n-1} = \binom{n+k}{n}.$$

b) On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont des VAR indépendantes de même loi que X.

Montrer que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la loi de $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad P(S_n = k) = \binom{n-1+k}{n-1} p^n q^k.$$

3. a) Calculer $P(X = Y)$.

b) En remarquant que $(X < Y)$, $(X = Y)$ et $(X > Y)$ forment un système complet d'événements, calculer $P(X < Y)$.

4. Trouver la loi de $T = X - Y$. Calculer son espérance et sa variance.

17 Théorèmes limites - Convergence en loi

■ **139.** Un étudiant légendaire ne faisait en moyenne qu'une faute d'orthografe tous les 500 mots.

Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un devoir contenant 200 mots ?

On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

■ **140.** On jette 12 000 fois un dé équilibré.

Estimer par un théorème d'approximation la probabilité que le nombre de 6 obtenus soit compris entre 1 800 et 2 100.

■ **141.** Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure.

Quel est le nombre de lignes téléphoniques que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égal à $2,5\%$?

■ **142.** Un commando de soldats doit traverser une rivière, malheureusement infestée de crocodiles. La probabilité qu'un soldat soit dévoré au cours de la traversée est de $1/10$. Combien faut-il envoyer de soldats pour que la probabilité d'avoir au moins 300 personnes sur l'autre rive soit supérieure à 95 % ?

■ **143.** Un chef de projet informatique estime la taille du projet qu'on lui demande de réaliser à environ 10 000 fonctions. Chaque jour, chacun de ses 10 ingénieurs code un nombre de fonctions. Chaque réalisation demande un temps aléatoire, suivant une certaine loi. La durée de codage d'une fonction suit une loi à densité, exprimée en journées. Proposer un intervalle de confiance pour la durée moyenne du projet (en nombre de jours) dans les cas où la durée du codage d'une fonction :

1. suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1/2]$,
2. suit la loi exponentielle de paramètre 4.

On utilisera d'une part l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et d'autre part l'approximation par une loi normale et on comparera les résultats.

■ **144.** Soit p un réel de l'intervalle $]0;1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $M_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$.

1. Rappeler la loi faible des grands nombres.
2. Les variables aléatoires Y_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance et la variance de M_n.
4. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(|M_n - 2p| > \varepsilon\big) = 0.$$

18 Fonctions de plusieurs variables

A. Premiers calculs

■ **145.** Calculer les dérivées partielles des fonctions et tracer leur domaine de définition :

1. $f(x,y)=\dfrac{x^3y+y^2x}{x+y}$.

2. $f(x,y)=\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$.

3. $f(x,y)=\dfrac{\ln x}{x^2+y^2-9}$.

4. $f(x,y)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.

5. $f(x,y)=\sqrt{xy}$

■ **146.** Soit f et g les fonctions défines par :

$$f:(x,y)\longmapsto x\ln y+y^2\sin x$$

$$g:t\longmapsto f\left(t^3,t^2\right).$$

Donner l'ensemble I sur lequel g est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer $g'(t)$ pour t dans I.

B. Équations aux dérivées partielles

■ **147.** Soit $E=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbf{R}^2$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur E et vérifiant :

$$\forall(x,y)\in E,\quad \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y.\end{cases}$$

C. Points critiques

■ **148.** Étudier les extrema de la fonction définie par $f(x,y)=x^2+y^2+x^3$.

■ **149.** Étudier les extrema de la fonction définie par $f(x,y)=x^3+xy+y^3$.

■ **150.** Soit a,b,c soit réels tels que $(a,c)\neq(0,0)$. On considère la fonction q définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$q(x,y)=ax^2+cy^2+2bxy.$$

On définit également le sous-ensemble S de $\mathbf{R}^2$ par : $S=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \quad x^2+y^2=1\right\}$. Enfin, on définit sur $I=[0,2\pi]$ la fonction φ par : $\varphi(t)=q(\cos t,\sin t)$.

1. Justifier que φ admet un minimum m et un maximum M absolus sur l'intervalle I.
En déduire que $q(S)=[m,M]$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $f(x,y)=q(x,y)-m\|X\|^2$ où $X=(x,y)$.
Montrer que :

$$\forall X\neq(0,0)\quad f(x,y)=\|X\|^2 f\left(\frac{X}{\|X\|}\right).$$

3. En déduire que f est positive sur $\mathbf{R}^2$.

4. Calculer les dérivées partielles de f.

19 Statistiques

A. Séries statisitques

■ 151. Une nouvelle espèce d'huîtres.
Une nouvelle espèce d'huîtres a été implantée dans une région ostréicole. Les résultats des premières récoltes sont consignés par année et par tonne dans le tableau ci-après où x_i désigne l'année et p_i le tonnage.

x_i	2017	2018	2019	2020	2021
p_i	$4,05$	$6,75$	$8,93$	$15,68$	$21,1$

On veut réaliser un outil de prévision pour les années suivantes, en supposant que les conditions d'élevage restent identiques. On pose $t_i = x_i - 2017$ et $z_i = \ln p_i$ arrondi à 10^{-2} au plus près. On obtient le tableau suivant :

t_i	0	1	2	3	4
z_i	$1,40$	$1,91$	$2,19$	$2,75$	$3,05$

1. Définir et calculer le coefficient de corrélation linéaire entre t et z.
2. Par la méthode des moindres carrés, déterminer l'équation de la droite de régression de z en t.
3. Déduire de ce qui précède une relation de la forme $p(x) = \alpha\, e^{\beta\,(x-2009)}$.
4. Donner une prévision pour la récolte de l'année 2025.

■ 152. Réaction chimique.
L'étude d'une réaction chimique en fonction du temps a donné les résultats suivants :

temps t (en heures)	1	2	3	4	5
C en g/l	$6,25$	$6,71$	$7,04$	$7,75$	$8,33$

Des considérations théoriques laissent supposer que la concentration C et le temps t sont liés par une relation de la forme

$$C = \frac{1}{at+b}.$$

Déterminer les valeurs de a et b par la méthode des moindres carrés.

B. Tests statisitques

■ 153. Teneur en protéines de graines de soja.
On a mesuré la teneur en protéines de 115 échantillons de graines de soja, c'est à dire le rapport de la masse des protéines à la masse totale exprimé en centièmes ; les résultats obtenus ont été groupés par classes, chacune de longueur unité (soit un centième), et sont indiqués dans le tableau ci-dessous (chaque classe est définie par son milieu) :

classe	$30,5$	$31,5$	$32,5$	$33,5$	$34,5$
effectifs	2	2	3	4	7

classe	$35,5$	$36,5$	$37,5$	$38,5$	$39,5$
effectifs	15	18	13	15	10

1em

classe	$40,5$	$41,5$	$42,5$	$43,5$	$44,5$	$45,5$
effectifs	11	5	4	5	0	1

On admet que la variable aléatoire X égale à la teneur moyenne en protéines d'un échantillon suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dont les paramètres μ et σ sont inconnus.
Estimer μ. Peut-on, au niveau 5%, conserver l'hypothèse $\mu = 37,5$?

■ 154. Test de conformité sur une proportion
Lors d'un sondage sur 100 personnes interrogées, 60 pensent voter pour un(e) candidat(e) donné(e). On modélise le choix par un échantillon $(X_1, \ldots, X_{100})$ de variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Déterminer l'espérance et la variance de la fréquence empirique F.
2. On note F^* la fréquence empirique centrée réduite. Par quelle loi peut on approcher celle de F^* ?
3. Calculer u tel que $P\big(|F^*| \leq u\big) \geq 0,99$, puis montrer que la probabilité que p appartienne à l'intervalle

$$IC = \left[F - u\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}} ; F + u\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}} \right]$$

où n est un entier à préciser, est supérieure à 0,99.

4. Montrer que pour tout p de $[0;1]$ on a $p(1-p) \leq 1/4$.
   En déduire que la probabilité que p appartienne à $[F-u/20; F+u/20]$ est supérieure à $0,99$.
5. Que pensez-vous des chances du(de la) candidat(e) concerné(e) d'être réellement élu(e) ?
   Si on avait utilisé un échantillon de 1000 personnes et que l'on avait obtenu la même fréquence empirique, votre réponse serait-elle modifiée ?