TD 1 : Nombres complexes

À prendre avec des précautions

Exercice 1

1. $z_1 = \dfrac{3+6i}{3-4i} = \dfrac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{9+30i-24}{9+16} = \dfrac{-15+30i}{25} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}\,i.$

2. $z_2 = e^{-i\pi/6} = \cos\Big(-\dfrac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\dfrac{\pi}{6}\Big) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i.$

3. $z_3 = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,i.$

4. $z_4 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)^2 = \left(\dfrac{1+3i}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + 2\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{5}\,i$
$= -\dfrac{8}{25} + \dfrac{6}{25}\,i.$

5. $z_5 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\big)^3 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1.$

Exercice 2

1. $z_1 = -2.$

$$|z_1| = 2, \qquad \arg(z_1) = \pi \quad (\text{ou } -\pi, \text{ principal} : \pi).$$

Donc

$$\boxed{z_1 = 2e^{i\pi}}.$$

2. $z_2 = 3.$

$$|z_2| = 3, \qquad \arg(z_2) = 0.$$

Donc

$$\boxed{z_2 = 3e^{i0} = 3\,.}$$

3. $z_3 = 4 + 4i.$

$$|z_3| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}, \qquad \arg(z_3) = \arctan\Big(\frac{4}{4}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\boxed{z_3 = 4\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\,.}$$

4. $z_4 = \sqrt{3} - i.$

$$|z_4| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2, \qquad \arg(z_4) = \arctan\Big(\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big) = -\frac{\pi}{6}.$$

Donc

$$\boxed{z_4 = 2e^{-i\pi/6}.}$$

5. $z_5 = -\dfrac{4}{3}i.$

$$|z_5| = \frac{4}{3}, \qquad \arg(z_5) = -\frac{\pi}{2} \text{ (dans }]-\pi,\pi]).$$

Donc

$$\boxed{z_5 = \frac{4}{3}\, e^{-i\pi/2}.}$$

6. $z_6 = \cos\alpha\, e^{i\theta}, \quad \alpha \in]-\pi,\pi],\ \theta \in \mathbb{R}.$

Remarque : $\cos\alpha \in \mathbb{R}$ peut être positif ou strictement négatif.

$$|z_6| = |\cos\alpha|, \qquad \arg(z_6) = \begin{cases} \theta & \text{si } \cos\alpha \geq 0, \\ \theta + \pi & \text{si } \cos\alpha < 0, \end{cases}$$

(on ramène l'argument dans $]-\pi,\pi]$ si nécessaire).

Ainsi on peut écrire de manière compacte

$$\boxed{z_6 = |\cos\alpha|\, e^{\,i(\theta + \mathbf{1}_{\{\cos\alpha<0\}}\pi)}.}$$

En particulier, si l'on choisit l'argument principal $\arg(z_6) \in]-\pi,\pi]$, alors

$$z_6 = |\cos\alpha|\, e^{i\,\arg(z_6)} \quad \text{où } \arg(z_6) = \begin{cases} \theta \text{ (mod } 2\pi) \text{ réduit dans }]-\pi,\pi] & \text{si } \cos\alpha \geq 0, \\ \theta + \pi \text{ (mod } 2\pi) \text{ réduit dans }]-\pi,\pi] & \text{si } \cos\alpha < 0. \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

1. Formes exponentielles de a, b et ab.

Pour $a = 1 + i$:

$$|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \arg(a) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{(argument principal } \in (-\pi,\pi]).$$

Donc

$$\boxed{a = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}.}$$

Pour $b = \sqrt{3} - i$:

$$|b| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2, \qquad \arg(b) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Ainsi

$$\boxed{b = 2\, e^{-i\pi/6}.}$$

Pour le produit ab, on additionne les arguments et multiplie les modules :

$$|ab| = |a||b| = \sqrt{2}\cdot 2 = 2\sqrt{2}, \qquad \arg(ab) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

D'où

$$\boxed{ab = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/12}.}$$

On peut vérifier par le calcul :

$$ab = (1+i)(\sqrt{3} - i) = \underbrace{(\sqrt{3}+1)}_{\Re(ab)} + i\,\underbrace{(\sqrt{3}-1)}_{\Im(ab)}.$$

2. Valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ **et** $\sin(\pi/12)$**.**

En divisant l'expression exponentielle de ab par son module on obtient

$$e^{i\pi/12} = \frac{ab}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

On peut aussi écrire ces valeurs sous la forme plus courante :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Exercice 4

On écrit

$$1+i\sqrt{3} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2e^{i\pi/3}, \qquad 1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}.$$

Ainsi

$$(1+i\sqrt{3})^n = 2^n e^{in\pi/3}, \qquad (1-i\sqrt{3})^n = 2^n e^{-in\pi/3},$$

et

$$z = (1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n = 2^n\Big(e^{in\pi/3} - e^{-in\pi/3}\Big) = 2^n \cdot 2i\sin\Big(\frac{n\pi}{3}\Big) = i\,2^{n+1}\sin\Big(\frac{n\pi}{3}\Big).$$

On obtient donc une quantité purement imaginaire. Comme

$$\sin\Big(\frac{n\pi}{3}\Big) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } n \equiv 1,2 \pmod 6, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } n \equiv 4,5 \pmod 6, \\ 0 & \text{si } n \equiv 0,3 \pmod 6, \end{cases}$$

on en déduit la forme exponentielle de z :

$$\boxed{\begin{array}{ll} n \equiv 1,2 \pmod 6 : & z = 2^n\sqrt{3}\,e^{i\pi/2}, \\ n \equiv 4,5 \pmod 6 : & z = 2^n\sqrt{3}\,e^{-i\pi/2} \ (= 2^n\sqrt{3}\,e^{i3\pi/2}), \\ n \equiv 0,3 \pmod 6 : & z = 0 \ \ \text{(pas de forme expo.).} \end{array}}$$

Exercice 5

On écrit $\sqrt{3}\cos x + \sin x = R\cos(x-\varphi)$ avec

$$R = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

L'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$ devient alors

$$2\cos\Big(x - \frac{\pi}{6}\Big) = \sqrt{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\Big(x - \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

d'où

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Exercice 6

On pose
$$S_4 = \cos^4\theta - \sin^4\theta, \qquad S_3 = \cos^3\theta - \sin^3\theta.$$

On utilise les formules d'Euler
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

1) Linéarisation de $S_4 = \cos^4\theta - \sin^4\theta$.

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\Big(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\Big),$$
$$\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\Big(e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\Big).$$

En soustrayant,
$$S_4 = \frac{1}{16}\Big(8e^{2i\theta}+8e^{-2i\theta}\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\Big) = \boxed{\cos(2\theta)}.$$

On aurait pu aussi remarquer que :
$$S_4 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \cos(2\theta)\cdot 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{S_4 = \cos(2\theta)}.$$

2) Linéarisation de $S_3 = \cos^3\theta - \sin^3\theta$.

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\Big(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\Big) = \frac{1}{4}\Big(\cos 3\theta + 3\cos\theta\Big).$$

De même,
$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{-8i}\Big(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\Big) = \frac{1}{4}\Big(3\sin\theta - \sin 3\theta\Big).$$

Donc
$$S_3 = \cos^3\theta - \sin^3\theta = \frac{1}{4}\Big(\cos 3\theta + 3\cos\theta\Big) - \frac{1}{4}\Big(3\sin\theta - \sin 3\theta\Big) = \boxed{\frac{1}{4}\big(\cos 3\theta + \sin 3\theta\big) + \frac{3}{4}\big(\cos\theta - \sin\theta\big)}.$$

Exercice 7

Par la formule de Moivre,
$$(\cos t + i\sin t)^5 = \cos 5t + i\sin 5t.$$

En développant et en prenant la partie réelle,
$$\cos 5t = \cos^5 t - 10\cos^3 t\sin^2 t + 5\cos t\sin^4 t.$$

Or $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$. On obtient
$$\cos 5t = \cos^5 t - 10\cos^3 t(1-\cos^2 t) + 5\cos t(1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t) = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t.$$

$$\boxed{\cos(5t) = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t}.$$

Exercice 8

On a

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

1) Forme exponentielle : $\boxed{j = e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ (son module vaut 1 et son argument est $2\pi/3$).

2) Puissances et somme :

$$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad j^3 = e^{i2\pi} = 1.$$

Donc

$$1 + j + j^2 = 1 + \Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) + \Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 0.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer $(1+j)^{2n+1} = -j^{n+2}$. Or

$$1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Alors

$$(1+j)^{2n+1} = e^{i(2n+1)\frac{\pi}{3}} = e^{i\left((n+2)\frac{2\pi}{3} - \pi\right)} = -\,e^{i(n+2)\frac{2\pi}{3}} = -\,j^{n+2}.$$

Exercice 9

Soient z_1, z_2 de module 1. Écrivons

$$z_1 = e^{i\alpha}, \qquad z_2 = e^{i\beta}, \qquad u = \tfrac{\alpha-\beta}{2}, \quad v = \tfrac{\alpha+\beta}{2}.$$

Alors

$$z_1 + z_2 = e^{iv}\big(e^{iu} + e^{-iu}\big) = 2e^{iv}\cos u, \qquad 1 + z_1z_2 = 1 + e^{i(\alpha+\beta)} = e^{iv}\big(e^{-iv} + e^{iv}\big) = 2e^{iv}\cos v.$$

Si $\cos v \neq 0$ (i.e. $1 + z_1z_2 \neq 0$),

$$Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2} = \frac{2e^{iv}\cos u}{2e^{iv}\cos v} = \boxed{\frac{\cos u}{\cos v} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \in \mathbb{R}}.$$

De même,

$$1 - z_1z_2 = 1 - e^{i(\alpha+\beta)} = e^{iv}\big(e^{-iv} - e^{iv}\big) = -2ie^{iv}\sin v,$$

et si $\sin v \neq 0$ (i.e. $1 - z_1z_2 \neq 0$),

$$Z' = \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1z_2} = \frac{2e^{iv}\cos u}{-2ie^{iv}\sin v} = \boxed{i\,\frac{\cos u}{\sin v} = i\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \in i\mathbb{R}}.$$

Remarque : si $1 + z_1z_2 = 0$ (resp. $1 - z_1z_2 = 0$), la fraction Z (resp. Z') n'est pas définie.

Exercice 10

1. Parallélogramme pour les modules.

$$|u+v|^2 = (u+v)(\overline{u+v}) = |u|^2 + |v|^2 + u\overline{v} + \overline{u}\,v,$$

$$|u-v|^2 = (u-v)(\overline{u-v}) = |u|^2 + |v|^2 - u\overline{v} - \overline{u}\,v.$$

En sommant :

$$\boxed{|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\big(|u|^2 + |v|^2\big)}.$$

2. Condition pour que $\left|\dfrac{1+iu}{1-iu}\right| = 1$ **.** On a

$$\left|\frac{1+iu}{1-iu}\right| = 1 \iff |1+iu| = |1-iu|.$$

Écrivons $u = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$|1+iu|^2 = (1-b)^2 + a^2, \qquad |1-iu|^2 = (1+b)^2 + a^2.$$

L'égalité des modules équivaut à $(1-b)^2 = (1+b)^2$, soit $b = 0$. Donc $u \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si $u \in \mathbb{R}$, on a $|1+iu| = |1-iu|$ donc la fraction est de module 1 (et le dénominateur est non nul car $u \neq -i$).

$$\boxed{\left|\frac{1+iu}{1-iu}\right| = 1 \iff u \in \mathbb{R}}.$$

Exercice 11

1. Avec $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{12}$,

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Ici $\cos\big(\frac{a-b}{2}\big) = \cos\big(\frac{\pi}{24}\big) > 0$, donc

$$z = e^{i\pi/6} + e^{i\pi/12} = 2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{i\pi/8}.$$

Ainsi

$$\boxed{\arg(z) = \frac{\pi}{8} \pmod{2\pi}}.$$

2. Pour $\theta \in \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$.

- $z_+ = 1 + e^{i\theta} = 2\cos\big(\frac{\theta}{2}\big)\, e^{i\theta/2}$ avec $\cos(\theta/2) > 0$, d'où

$$\boxed{\arg(z_+) = \frac{\theta}{2} \pmod{2\pi}}.$$

- $z_- = 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)\, e^{i\theta/2} = 2\big|\sin\frac{\theta}{2}\big|\, e^{i\varphi}$, où l'argument φ dépend du signe de $\sin(\theta/2)$:

$$\boxed{\arg(z_-) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, & \text{si } \theta > 0, \\ \text{(indéfini)}, & \text{si } \theta = 0 \ \ (z_- = 0), \\ \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, & \text{si } \theta < 0. \end{cases}}$$

Exercice 12

1) Solutions de $z^n = 1$. Écrivons $z = re^{i\theta}$. L'équation impose $r^n = 1 \Rightarrow r = 1$ et $e^{in\theta} = 1 \Rightarrow n\theta = 2k\pi$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Ainsi les n solutions sont

$$\boxed{z_k = e^{2i\pi k/n} \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1)}.$$

2) Avec $\omega = e^{2i\pi/n}$. Somme géométrique :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0 \quad (\text{car } \omega \neq 1,\ \omega^n = 1).$$

$$\boxed{S = 0}.$$

Produit :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{2i\pi \frac{n(n-1)}{2n}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}.$$

$$\boxed{P = (-1)^{n-1}}.$$

Exercice 13

1) Résoudre $z^4 = i$.
On écrit $i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$. Les racines quatrièmes sont

$$z = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\boxed{z \in \left\{e^{i\pi/8},\ e^{i5\pi/8},\ e^{i9\pi/8},\ e^{i13\pi/8}\right\}}.$$

2) Résoudre $z^5 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^3}$.
On met le second membre sous forme exponentielle :

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \ \Rightarrow\ (1+i\sqrt{3})^4 = 16\, e^{i4\pi/3},$$

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \ \Rightarrow\ (1+i)^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}.$$

Donc

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^3} = \frac{16}{2\sqrt{2}}\, e^{i(\frac{4\pi}{3}-\frac{3\pi}{4})} = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

On cherche $z = re^{i\theta}$ tel que $z^5 = 4\sqrt{2}\, e^{i7\pi/12}$. Alors

$$r^5 = 4\sqrt{2} = 2^{5/2} \ \Rightarrow\ r = \sqrt{2}, \qquad 5\theta = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ \Rightarrow\ \theta = \frac{7\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5}.$$

Ainsi les cinq solutions sont

$$\boxed{z_k = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{7\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4}.$$

Exercice 14

Posons $y = z^2$. L'équation devient

$$y^2 - 2(\cos 2a)\, y + 1 = 0.$$

Or $e^{\pm i2a}$ sont solutions, puisque $(e^{\pm i2a})^2 - 2\cos(2a)\, e^{\pm i2a} + 1 = 0$. Donc

$$z^2 \in \{e^{i2a},\ e^{-i2a}\}.$$

Il s'ensuit

$$\boxed{z \in \{\pm e^{ia},\ \pm e^{-ia}\}}.$$

Remarque. Si $a \equiv 0 \pmod{\pi}$, on a $(z^2-1)^2 = 0$ (racines ± 1 doubles) ; si $a \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, on a $(z^2+1)^2 = 0$ (racines $\pm i$ doubles).

Exercice 14 bis

On utilise $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$:

$$\sqrt{3}\sin x\cos x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\Big(\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 1\Big).$$

L'équation devient

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}.$$

Or $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\big(2x - \frac{\pi}{3}\big)$. Ainsi

$$2\cos\Big(2x - \frac{\pi}{3}\Big) = \sqrt{2} \iff \cos\Big(2x - \frac{\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

d'où

$$\boxed{x = \frac{\pi}{24} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}.$$

Exercice 15

1. Formule de la tangente demi-angle. Posons $t = \tan\big(\frac{a}{2}\big)$ (avec $a \in \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$). Alors

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

d'où

$$\boxed{\tan a = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\tan\big(\frac{a}{2}\big)}{1-\tan^2\big(\frac{a}{2}\big)}}.$$

2. Valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$. En prenant $a = \frac{\pi}{4}$ dans la formule précédente, on a

$$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1-t^2} \quad\Rightarrow\quad t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Comme $t > 0$, $t = -1 + \sqrt{2}$. Ainsi

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1}.$$

3. Résoudre $(\sqrt{2}-1)\cos x + \sin x = -1$. Écrivons $A\cos x + B\sin x = R\cos(x-\varphi)$ avec

$$A = \sqrt{2}-1, \quad B = 1, \quad R = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}, \quad \varphi = \arctan\frac{B}{A} = \arctan(\sqrt{2}+1) = \frac{3\pi}{8}.$$

Donc

$$R\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = -1 \iff \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{1}{R} = -\cos\frac{\pi}{8}.$$

Ainsi

$$x - \frac{3\pi}{8} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

soit finalement

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}.$$

Exercice 16

1. Soit u **de module** 1 **et d'argument** $\theta \in]-\pi, \pi]$. On écrit $u = e^{i\theta}$. Alors

$$1 + u = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2},$$

$$1 - u = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right) = -2i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2}.$$

Donc

$$\boxed{|1+u| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}, \qquad \boxed{|1-u| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}.$$

Pour les arguments (quand le nombre n'est pas nul) :

$$\boxed{\arg(1+u) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} \pmod{2\pi}, & \text{si } \theta \in (-\pi, \pi), \\ \text{indéfini}, & \text{si } \theta = \pi \quad (1+u=0). \end{cases}}$$

$$\boxed{\arg(1-u) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, & \text{si } \theta > 0, \\ \text{indéfini}, & \text{si } \theta = 0 \quad (1-u=0), \\ \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, & \text{si } \theta < 0. \end{cases}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. **Simplifier :**

(a) $(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n$. Comme $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$,

$$1 + \cos\theta + i\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2}.$$

Ainsi

$$\boxed{(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{n\theta}{2}} = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right)}.$$

(b) $\left(\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n$, $\quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Posons $t = \tan\theta$. Alors

$$\frac{1+it}{1-it} = \frac{(1+it)^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = e^{i2\theta}.$$

Donc

$$\boxed{\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = e^{i2n\theta} = \cos(2n\theta) + i\sin(2n\theta)}.$$

Exercice 17

Soit $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1) S_n est réel. On a $\overline{1+i} = 1-i$, donc $\overline{(1+i)^n} = (1-i)^n$. Ainsi

$$\overline{S_n} = \overline{(1+i)^n} + \overline{(1-i)^n} = (1-i)^n + (1+i)^n = S_n,$$

d'où $S_n \in \mathbb{R}$.

2) Développement. Par la formule du binôme,

$$(1 \pm i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\pm i)^k \quad \Rightarrow \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \bigl(i^k + (-i)^k\bigr).$$

Or $i^k + (-i)^k = 0$ si k est impair et $= 2(-1)^k$ si $k = 2m$. Donc

$$\boxed{S_n = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}}.$$

3) Forme exponentielle de S_n. Comme $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ et $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$,

$$S_n = (\sqrt{2})^n \Bigl(e^{in\pi/4} + e^{-in\pi/4}\Bigr) = 2^{n/2} \cdot 2\cos\Bigl(\frac{n\pi}{4}\Bigr).$$

$$\boxed{S_n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\Bigl(\frac{n\pi}{4}\Bigr)}.$$

4) Somme combinatoire. En comparant (2) et (3),

$$2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\Bigl(\frac{n\pi}{4}\Bigr).$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} = 2^{\frac{n}{2}} \cos\Bigl(\frac{n\pi}{4}\Bigr)}.$$