TD 2 : Fonctions

à prendre avec précautions

Exercice 1

1) $f_1(x) = \dfrac{1-\cos x}{\tan x}$ en $a = 0$.

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad \tan x \sim x \quad (x \to 0)$$

donc

$$\boxed{f_1(x) \sim \frac{x}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0}.$$

2) $f_2(x) = \dfrac{1+\cos x}{(\pi - x)^2}$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$. La fonction est continue en $\pi/4$, ainsi

$$\boxed{f_2(x) \sim \frac{1+\cos(\pi/4)}{(\pi-\pi/4)^2} = \frac{8}{9\pi^2}\,(2+\sqrt{2})} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to\pi/4} f_2(x) = \frac{8}{9\pi^2}\,(2+\sqrt{2})}.$$

3)

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+2x-3} = \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x+3)} = \frac{\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}}{(x-1)(x+3)} = \boxed{\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+3)}} \quad (x \neq 1).$$

Vers $x \to 1$:

$$\boxed{f_3(x) \to \frac{1}{(1+1)(1+3)} = \frac{1}{8}}, \qquad \boxed{f_3(x) \sim \frac{1}{8}}.$$

Vers $x \to 2$:

$$\boxed{f_3(x) \to \frac{1}{(\sqrt{2}+1)\cdot 5} = \frac{\sqrt{2}-1}{5}}, \qquad \boxed{f_3(x) \sim \frac{1}{5(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{5}}.$$

Vers $x \to +\infty$:

$$\boxed{f_3(x) = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+3)} \sim \frac{1}{x^{3/2}}}, \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = 0}.$$

4) $f_4(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1} - x\sqrt{2}}$ en $a = +\infty$.

$$\sqrt{x^4+1} = x^2\sqrt{1+\tfrac{1}{x^4}} = x^2 + o(1),$$

donc le terme sous le radical vaut $2x^2 - x\sqrt{2} + o(1)$ et

$$\boxed{f_4(x) \sim \sqrt{2}\,x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty}.$$

5) $f_5(x) = \sin(1-\cos x)$ en $a=0$.

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \sin t \sim t \ (t\to 0) \ \Rightarrow \ \boxed{f_5(x) \sim \frac{x^2}{2}} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} f_5(x) = 0}.$$

6) $f_6(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{e^x} = e^{\sqrt{x^2+x}-x}$ en $a=+\infty$.

$$\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où

$$\boxed{f_6(x) \sim e^{1/2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = e^{1/2}}.$$

Exercice 2

On considère

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}, & x \neq 0, \\ 8, & x = 0, \end{cases} \qquad \text{définie sur } [-4,+\infty[.$$

Continuité sur $[-4,+\infty[\setminus\{0\}$.
Les fonctions $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \sqrt{x+4}-2$ sont continues sur $[-4,+\infty[$.
De plus, $\sqrt{x+4}-2 = 0 \iff x = 0$. Donc $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}$ est continue sur $[-4,+\infty[\setminus\{0\}$, en particulier en $x=-4$, extrémité gauche de l'intervalle, où le dénominateur vaut $-2 \neq 0$.

Étude en $x=0$. Pour $x \neq 0$, on rationalise le dénominateur :

$$\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{\sin(2x)\big(\sqrt{x+4}+2\big)}{x}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\cdot 2\cdot\left(\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2)\right) = 1\cdot 2\cdot 4 = 8.$$

Or $f(0) = 8$. Donc f est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [-4,+\infty[.}$$

Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}).$$

Ensemble de définition. On doit avoir $\sqrt{x}$ défini, donc $x \geq 0$.

$$\boxed{\mathcal{D}_f = [0,+\infty[}.$$

Dérivabilité sur $]0,+\infty[$. Par composition de fonctions dérivables :

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \qquad x > 0.$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ avec } f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}.$$

Dérivabilité en $x=0$. On regarde la dérivée à droite :

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cos(\sqrt{h})-1}{h}.$$

Posons $t=\sqrt{h}$, donc $h=t^2$, $t\to 0^+$:

$$\frac{\cos(\sqrt{h})-1}{h}=\frac{\cos t-1}{t^2}.$$

Or $\cos t-1\sim -\frac{t^2}{2}$, donc

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t-1}{t^2}=-\tfrac{1}{2}.$$

Ainsi f est dérivable en 0, avec $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\ , \quad f'(0)=-\tfrac{1}{2}, \quad f'(x)=-\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\ (x>0).}$$

Exercice 4

On considère

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1) Image et bijectivité. Le dénominateur est strictement positif (discriminant <0), donc f est définie sur $\mathbb{R}$. On dérive :

$$f(x)=(2x+1)(x^2+x+1)^{-1/2}, \qquad f'(x)=\frac{3}{2(x^2+x+1)^{3/2}}>0.$$

Ainsi f est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2, \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=2,$$

et l'égalité $f(x)=\pm 2$ est impossible (elle mènerait à $-3=0$). Donc

$$\boxed{I=\operatorname{Im}(f)=]-2,\,2[\ },$$

et $f:\mathbb{R}\to I$ est bijective.

2) Propriétés de f^{-1} et dérivabilité. La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)>0$ pour tout x. Par le théorème d'inversion locale, $f^{-1}:I\to\mathbb{R}$ est C^1, strictement croissante, et

$$\boxed{(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{pour } y\in I}.$$

3) Calcul de $(f^{-1})'(1)$. Résolvons $f(x)=1$:

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=1 \implies (2x+1)^2=x^2+x+1 \ \text{ et } \ 2x+1\geq 0 \implies x=0.$$

Donc $f^{-1}(1)=0$ et

$$f'(0)=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{2}{3}}.$$

Exercice 5

On considère la fonction ch : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[.$$

1) Bijectivité et dérivabilité de ch **sur** $\mathbb{R}_+$**.** On a

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x).$$

Pour $x > 0$, $\mathrm{sh}(x) > 0$, et $\mathrm{sh}(0) = 0$. Ainsi ch est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\mathrm{ch}(0) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty.$$

Par continuité et monotonie, l'image de $\mathbb{R}_+$ est

$$\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{ch}) = [1, +\infty[}.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{ch} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[\text{ est une bijection}}.$$

Enfin, ch est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$\boxed{\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)}.$$

2) Dérivabilité de la bijection réciproque. Notons $g = \mathrm{ch}^{-1} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ ($g = \mathrm{arcch}$). Pour $y > 1$, en différentiant l'identité $\mathrm{ch}(g(y)) = y$:

$$\mathrm{ch}'(g(y))\, g'(y) = 1 \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{\mathrm{sh}(g(y))}.$$

Or, pour $x = g(y)$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ donne $\mathrm{sh}(g(y)) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(g(y)) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$ (positif pour $y > 1$). Ainsi

$$\boxed{g \in C^1(]1, +\infty[) \text{ et } g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad (y > 1).}$$

En $y = 1$, $g(1) = 0$ et

$$\lim_{y\to1^+} g'(y) = \lim_{y\to1^+} \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} = +\infty,$$

donc g n'est pas dérivable en 1 (mais elle y est continue).

$$\boxed{\mathrm{arcch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+ \text{ est continue, } C^1 \text{ sur }]1, +\infty[,\ \mathrm{arcch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}, \text{ et n'est pas dérivable en 1.}}$$

Exercice 6

On pose $u(x) = \sin(3x)$. Près de 0,

$$u(x) = 3x + o(x^2).$$

Or $\ln(1 + u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$. Ainsi

$$\ln(1 + \sin(3x)) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\boxed{\ln\big(1 + \sin(3x)\big) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \quad (\mathrm{DL}_2(0))}$$

Exercice 7

On développe séparément les deux termes.

- Développement de $(1+x)^{1/3}$ en 0 :

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + o(x^2).$$

- Développement de $\cos(2x)$ en 0 :

$$\cos(2x) = 1 - \tfrac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2).$$

- En combinant :

$$f_2(x) = (1+x)^{1/3} - \cos(2x) = \Big(1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + o(x^2)\Big) - \Big(1 - 2x^2 + o(x^2)\Big).$$

$$f_2(x) = \tfrac{1}{3}x + \Big(2 - \tfrac{1}{9}\Big)x^2 + o(x^2) = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{17}{9}x^2 + o(x^2).$$

$$\boxed{f_2(x) = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{17}{9}x^2 + o(x^2) \quad (\mathrm{DL}_2(0))}.$$

Exercice 8

On a

$$f_3(x) = \frac{\ln(1+\sin(3x))}{\sqrt[3]{1+x} - \cos(2x)}.$$

Numérateur ($\mathbf{DL_2}$ en 0). $\sin(3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$ et $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, donc

$$\ln(1+\sin(3x)) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

Dénominateur ($\mathbf{DL_2}$ en 0).

$$\sqrt[3]{1+x} - \cos(2x) = \Big(1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2\Big) - \Big(1 - 2x^2\Big) + o(x^2) = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{17}{9}x^2 + o(x^2).$$

Quotient ($\mathbf{DL_1}$). Cherchons $f_3(x) = a + bx + o(x)$. On impose

$$(a+bx)\Big(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{17}{9}x^2\Big) = 3x - \tfrac{9}{2}x^2 + o(x^2),$$

soit, en identifiant les coefficients de x puis x^2,

$$\frac{a}{3} = 3 \;\Rightarrow\; a = 9, \qquad \frac{17}{9}a + \frac{b}{3} = -\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; b = -\frac{129}{2}.$$

$$\boxed{f_3(x) = 9 - \frac{129}{2}\,x + o(x) \quad (\mathrm{DL}_1(0))}.$$

Exercice 9

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

1) Étude générale ($n \geq 1$ fixé).

(a) Domaine de définition.

On doit avoir $x^2 - 1 > 0$, donc $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

$$\boxed{\mathcal{D}_n =]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[\ }.$$

(b) Prolongement par continuité en 1.

Quand $x \to 1$, $x^n - 1 \sim n(x-1)$ et $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} \sim \sqrt{2}\,\sqrt{x-1}$. Ainsi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{n(x-1)}{\sqrt{2}\,\sqrt{x-1}} = 0.$$

$$\boxed{f_n \text{ est prolongeable en 1 par } f_n(1) = 0}.$$

(c) Prolongement par continuité en -1 selon la parité.

Posons $x = -1 + h$, $h \to 0^-$. Alors

$$x^n - 1 = \begin{cases} -nh + o(h), & n \text{ pair}, \\ -2 + nh + o(h), & n \text{ impair}, \end{cases} \qquad \sqrt{x^2-1} = \sqrt{(1-x)(x+1)} \sim \sqrt{2}\,\sqrt{-h}.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to -1^-} f_n(x) = 0 \text{ si } n \text{ est pair}} \quad (\text{prolongeable par } f_n(-1) = 0),$$

tandis que

$$\boxed{\lim_{x\to -1^-} f_n(x) = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}} \quad (\text{non prolongeable}).$$

(d) Limite en $+\infty$. $\sqrt{x^2-1} \sim x$, donc

$$f_n(x) \sim \frac{x^n}{x} = x^{n-1}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ +\infty, & n \geq 2. \end{cases}}$$

(e) Limite en $-\infty$. $\sqrt{x^2-1} \sim |x| = -x$ et $x^n - 1 \sim x^n$, d'où $f_n(x) \sim -x^{n-1}$.

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & n = 1, \\ +\infty, & n \text{ pair } (\geq 2), \\ -\infty, & n \text{ impair } (\geq 3). \end{cases}}$$

(f) Dérivabilité et dérivée. Sur $\mathcal{D}_n$, f_n est C^∞ et

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{x(x^n-1)}{(x^2-1)^{3/2}} = \boxed{\frac{(n-1)x^{n+1} - nx^{n-1} + x}{(x^2-1)^{3/2}}}.$$

2) Étude de $f_1(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Formes utiles. Pour $x > 1$:

$$f_1(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \boxed{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}.$$

Pour $x < -1$:

$$f_1(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \boxed{-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}.$$

(a) Bijections. - Sur $]1,+\infty[$, la fonction $h(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ est croissante, à valeurs dans $]0,1[$; donc $f_1(x) = \sqrt{h(x)}$ est croissante, avec $\lim_{x\to 1^+} f_1(x) = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = 1$.

$$\boxed{f_1 :]1,+\infty[\underset{\text{bij.}}{\longrightarrow}]0,1[}.$$

Par prolongement par continuité en $x = 1$ (valeur 0) :

$$\boxed{f_1 : [1,+\infty[\underset{\text{bij.}}{\longrightarrow} [0,1[}.$$

- Sur $]-\infty,-1[$, h est encore croissante et $h(x) > 1$; alors $-\sqrt{h(x)}$ est décroissante, avec $\lim_{x\to -\infty} f_1(x) = -1$ et $\lim_{x\to -1^-} f_1(x) = -\infty$.

$$\boxed{f_1 :]-\infty,-1[\underset{\text{bij.}}{\longrightarrow}]-\infty,-1[}.$$

(b) Nombre de solutions de $f_1(x) = a$ selon $a \in \mathbb{R}$.

a	$\#\{x \in \mathcal{D}_1 : f_1(x) = a\}$
$a < -1$	1 (sur $]-\infty,-1[$)
$-1 \le a \le 0$	0 (dans $\mathcal{D}_1$), mais $a = 0$ a $x = 1$ si l'on prolonge
$0 < a < 1$	1 (sur $]1,+\infty[$)
$a \ge 1$	0

(c) Bijection réciproque de f_1 sur $[1,+\infty[$. Pour $y \in [0,1[$,

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \iff y^2 = \frac{x-1}{x+1} \iff x(1-y^2) = 1+y^2 \iff \boxed{f_1^{-1}(y) = \frac{1+y^2}{1-y^2}}.$$