TD 3 : Intégrales et équations différentielles

Solutions à prendre avec des pincettes (rédaction/justification *etc.*)

Exercice 1

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$. Posons $u=e^x$ ($dx=\frac{du}{u}$). Alors

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int_1^e \frac{u-1}{u(u+1)}\,du = \int_1^e \Big(-\frac{1}{u}+\frac{2}{u+1}\Big)\,du.$$

Donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = -1+2\ln\Big(\frac{e+1}{2}\Big)}.$$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\,dt$.

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t}-\frac{1}{t+1} \;\Rightarrow\; \boxed{\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \ln\frac{4}{3}}.$$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. Posons $u=\cos^2 x$ ($du=-2\cos x\sin x\,dx$).

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2}\big[\ln(1+u)\big]_{1/2}^1 = \boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}}.$$

4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx$ (intégration par parties). Avec $u=\arctan x,\ v'=x \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}\arctan x\Big]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

Comme $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1-\dfrac{1}{1+x^2}$,

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\big[x-\arctan x\big]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

5. On pose

$$I = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

(a) Première intégration par parties. Choisissons $u=\sin(bx)$, $dv=e^{ax}\,dx$. Alors $du = b\cos(bx)\,dx$, $v=\dfrac{e^{ax}}{a}$ (si $a=0$, la formule finale reste vraie et la preuve est immédiate).

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Notons

$$J = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Alors

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b}{a}J. \tag{1}$$

(b) Deuxième intégration par parties (pour J). Cette fois $u = \cos(bx)$, $dv = e^{ax}\,dx$. Donc $du = -b\sin(bx)\,dx$, $v = \dfrac{e^{ax}}{a}$.

$$J = \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx) + \frac{b}{a}I. \tag{2}$$

(c) Résolution du système. En reportant (2) dans (1) :

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\cos(bx) + \frac{b}{a}I\right) = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b\,e^{ax}}{a^2}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}I.$$

Donc

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b\,e^{ax}}{a^2}\cos(bx),$$

et finalement

$$\boxed{I = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + C}.$$

Application à l'intégrale 5 :

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin(3x)\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{13}\big(2\sin(3x) - 3\cos(3x)\big)\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{3 - 2e^{\pi}}{13}}.$$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$.

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\!\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\!\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}.$$

7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. Avec $x = \cos t$, $dx = -\sin t\,dt$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^0 \sin t\,(-\sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Exercice 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,dx.$$

1) Calcul de I_0, I_1, I_2.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \boxed{1},$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

2) Convergence de $(I_n)_{n\geq 0}$. Pour $x \in [0, \pi/2]$ et $n \geq 0$, $(\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$. Donc $I_{n+1} \leq I_n$: la suite est décroissante. Comme $I_n \geq 0$, elle converge.

$$\boxed{(I_n) \text{ est décroissante et converge}}.$$

3) Relation de récurrence. Pour $n \geq 0$, intégration par parties sur I_{n+2} avec $u = \sin^{n+1} x$, $v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$:

$$I_{n+2} = \Big[-\sin^{n+1} x\,\cos x\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^2 x\,dx = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x(1-\sin^2 x)\,dx.$$

Ainsi

$$I_{n+2} = (n+1)\,I_n - (n+1)\,I_{n+2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{(n+2)\,I_{n+2} = (n+1)\,I_n}.$$

4) La suite $a_n = n\,I_n\,I_{n-1}$ est constante. En écrivant la relation précédente avec l'indice $n-1$: $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$. En multipliant par I_n,

$$a_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n = nI_{n-1}I_n = a_n.$$

Donc (a_n) est constante et, pour $n = 1$, $a_1 = 1 \cdot I_1 \cdot I_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{n\,I_n\,I_{n-1} = \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } n \geq 1}.$$

5) Limite de (I_n). Comme $I_{n-1} \geq I_n \geq 0$,

$$n\,I_n^2 \leq n\,I_n\,I_{n-1} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La suite étant positive, par encadrement, sa limite est donc 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = 0}.$$

Exercice 3

On définit

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4+t^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

1) Domaine de définition. Le dénominateur vaut $t^4 + t^2 + 1 = (t^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ pour tout t. Donc

$$\boxed{\mathcal{D}_F = \mathbb{R}}.$$

2) Parité. La fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{t^4+t^2+1}$ est paire. Alors

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \varphi(t)\,dt = -\int_{-2x}^{-x} \varphi(t)\,dt = -\int_x^{2x} \varphi(u)\,du = -F(x).$$

$$\boxed{F \text{ est impaire}}.$$

3) Tableau de variations. Par la règle de Leibniz,

$$F'(x) = \varphi(2x)\cdot 2 - \varphi(x) = \frac{2}{16x^4+4x^2+1} - \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1-2x^2-14x^4}{(16x^4+4x^2+1)(x^4+x^2+1)}.$$

Ainsi $\operatorname{sgn} F'(x) = \operatorname{sgn}(1-2x^2-14x^4)$. Posons $y = x^2 \geq 0$. Alors $1-2x^2-14x^4 > 0 \iff 14y^2+2y-1 < 0$, dont la racine positive est $y_0 = \dfrac{-1+\sqrt{15}}{14}$. En notant $\alpha = \sqrt{y_0} = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{15}}{14}}$, on obtient

$$\boxed{F'(x)\begin{cases} < 0, & |x| > \alpha, \\ = 0, & x = \pm\alpha, \\ > 0, & |x| < \alpha. \end{cases}}$$

Donc F décroît sur $]-\infty, -\alpha]$, croît sur $[-\alpha, \alpha]$, puis décroît sur $[\alpha, +\infty[$. Comme F est impaire, $F(-\alpha) = -F(\alpha)$. (On peut poser $M = F(\alpha) > 0$.)

4) (a) Encadrement utile. Pour $t > 0$ (ce qui suffira car on l'appliquera à $t = x^2 \geq 0$),

$$1+t+t^2 \geq t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{0 \leq \frac{1}{1+t+t^2} \leq \frac{1}{t^2}}.$$

(b) Limites aux bornes de $\mathcal{D}_F$. Pour $|t| \geq 1$, en appliquant l'encadrement précédent à $t = x^2$,

$$0 \leq \frac{1}{t^4+t^2+1} = \frac{1}{(t^2)^2+t^2+1} \leq \frac{1}{t^4}.$$

Ainsi, pour $x > 1$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4} = \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_x^{2x} = \frac{7}{24}\cdot\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

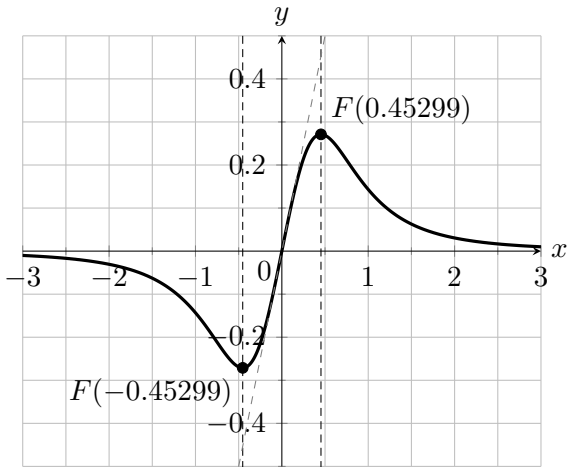
Par impaireté, la limite en $-\infty$ est également 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0}.$$

5) Valeur de $F'(0)$ et aspect de la courbe. On a $\varphi(0) = 1$, d'où

$$\boxed{F'(0) = 2\varphi(0) - \varphi(0) = 1}.$$

La courbe est *symétrique par rapport à l'origine* (fonction impaire), passe par $(0,0)$ avec une tangente de pente 1, croît sur $[-\alpha, \alpha]$ et décroît au-delà, avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x) = 0$.



Remarque : la valeur de α vaut $\sqrt{\frac{\sqrt{15}-1}{14}}$, car on pourrait montrer que $F(x) = G(2x) - G(x)$, si on pose

$$G(t) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

Exercice 4

On pose pour $t \in \mathbb{R}^*$: $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$, et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_x^{3x} f(t)\,dt = \int_x^{3x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$

1) Régularité et variations sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Sur chacun des ouverts $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, l'intégrande est continue ; par la règle de Leibniz,

$$F'(x) = 3\,f(3x) - f(x) = \frac{e^{3x}}{x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^x\left(e^{2x}-1\right)}{x}.$$

Ainsi, pour $x > 0$, $e^{2x} - 1 > 0$ et $x > 0 \Rightarrow\ F'(x) > 0$; pour $x < 0$, $e^{2x} - 1 < 0$ et $x < 0 \Rightarrow\ F'(x) > 0$.

$$\boxed{F \text{ est } C^1 \text{ et strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*.}$$

2) Limites à l'infini et croissance asymptotique. Pour $x > 0$, comme f est croissante (pour $t \geq 1$),

$$2x\,f(x) \leq F(x) \leq 2x\,f(3x) \quad \Rightarrow \quad 2e^x \leq F(x) \leq \frac{2}{3}e^{3x}.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty}.$$

Pour $x < 0$, on a

$$0 \leq F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{e^t}{|t|}\,dt \leq \frac{1}{|3x|}\int_{3x}^{x} e^t\,dt = \frac{e^x - e^{3x}}{3|x|} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0,$$

d'où

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0}.$$

3) Extension continue de g. Posons $g(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$ pour $t \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\lim_{t\to0} g(t) = \lim_{t\to0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

(dérivée de e^t en 0). En posant $g(0) = 1$, on obtient

$$\boxed{g \text{ se prolonge en une fonction continue sur } \mathbb{R}}.$$

4) Prolongement par continuité de F en 0 — détails.
On écrit

$$f(t) = \frac{e^t}{t} = \frac{1}{t} + g(t), \qquad g(t) = \frac{e^t - 1}{t} \quad (t \neq 0), \quad g(0) = 1.$$

La fonction g ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$,

$$F(x) = \int_x^{3x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_x^{3x} \frac{dt}{t}}_{=\ln 3} + \int_x^{3x} g(t)\,dt = \ln 3 + \int_x^{3x} g(t)\,dt.$$

Théorème des accroissements finis pour les intégrales (T.A.F.I.), appelé aussi théorème de la valeur moyenne. Si g est **continue** sur le segment $[a,b]$ (avec $a<b$), alors

$$\exists\, \xi \in [a,b] \quad \text{tel que} \quad \int_a^b g(t)\,dt = g(\xi)\,(b-a).$$

Application.

- Si $x>0$, g est continue sur $[x,3x]$, donc

$$\int_x^{3x} g(t)\,dt = g(\xi_x)\,(3x-x) = 2x\,g(\xi_x) \quad \text{pour un } \xi_x \in [x,3x].$$

- Si $x<0$, on applique le T.A.F.I. sur $[3x,x]$ (où $3x<x$) :

$$\int_{3x}^{x} g(t)\,dt = g(\eta_x)\,(x-3x) = -\,2x\,g(\eta_x).$$

Ainsi

$$\int_x^{3x} g(t)\,dt = -\int_{3x}^{x} g(t)\,dt = 2x\,g(\eta_x).$$

En posant $\xi_x = \eta_x$, dans tous les cas

$$\boxed{\int_x^{3x} g(t)\,dt = 2x\,g(\xi_x) \quad \text{avec} \quad \xi_x \in [\min(x,3x),\, \max(x,3x)]}.$$

Pourquoi $\xi_x \to 0$ *quand* $x \to 0$? Comme ξ_x est entre x et $3x$, on a

$$|\xi_x| \leq \max(|x|,|3x|) = 3|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

donc $\xi_x \to 0$. Par continuité de g en 0, $g(\xi_x) \to g(0) = 1$, et

$$\int_x^{3x} g(t)\,dt = 2x\,g(\xi_x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Conclusion.

$$F(x) = \ln 3 + \int_x^{3x} g(t)\,dt \xrightarrow[x\to 0]{} \ln 3.$$

Ainsi F se prolonge par continuité en 0 en posant

$$\boxed{F(0) = \ln 3}.$$

Exercice 5

Sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos x \neq 0$, donc on peut diviser par $\cos^3 x$. L'équation différentielle est donc linéaire d'ordre un, homogène, à coefficients continus sur I, et sous forme normalisée.
On détermine une primitive de $x \mapsto \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$, qui est par exemple $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$. Ainsi, par théorème de Cauchy linéaire l'ensemble de solutions est $\boxed{\text{la droite vectorielle dirigée par } x \mapsto \exp\big(-\tfrac{1}{\cos^2(x)}\big)}$.

Exercice 6

On résout sur $I =]-\infty, -1[$, $J =]-1, 1[$ et $K =]1, +\infty[$:

$$(1-x^2)\,y' - 2y + x + 1 = 0 \iff y' - \frac{2}{1-x^2}\,y = -\frac{x+1}{1-x^2}.$$

L'équation différentielle est donc linéaire d'ordre un, à coefficients continus sur I, J et K, et sous forme normalisée.

On décompose

$$-\frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x},$$

donc

$$\int -\frac{2}{1-x^2}\,dx = \int \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)dx = \ln|1-x| - \ln|1+x| = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

On peut donc choisir comme facteur intégrant

$$\mu(x) = \exp\left(\ln\left|\tfrac{1-x}{1+x}\right|\right) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

Sur chacun des intervalles I, J, K (où le signe est constant), on prend simplement

$$\mu(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{(tout multiple non nul conviendrait).}$$

Alors, par la méthode de variation de la constante

$$(\mu y)' = \mu\left(y' - \frac{2}{1-x^2}y\right) = \mu\left(-\frac{x+1}{1-x^2}\right) = -\frac{1}{1+x}.$$

En intégrant :

$$\mu(x)\,y(x) = -\ln|1+x| + C \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y(x) = \frac{1+x}{1-x}\left(C - \ln|1+x|\right)}.$$

Cette formule décrit la solution sur chacun des intervalles I, J, K (avec des constantes C éventuellement différentes sur chaque intervalle).

Exercice 7

On considère, pour $x \neq 0$,

$$x\,y'(x) + y(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \iff y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

C'est une équation linéaire d'ordre 1 (sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$). Un facteur intégrant est $\mu(x) = x$ (car $\mu'/\mu = 1/x$). Alors

$$(xy)' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad xy = \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = 2\sqrt{x^2+1} + C.$$

Ainsi, sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$,

$$\boxed{y(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x} + \frac{C}{x}}.$$

(La constante C peut être différente de part et d'autre de 0.)

Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$? Pour qu'une solution soit définie sur $\mathbb{R}$, elle doit être C^1 en 0. Or, près de 0,

$$y(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2}+C}{x} = \frac{2+C}{x} + x + o(x).$$

Il faut donc annuler le terme $\dfrac{2+C}{x}$, d'où $C=-2$ (à gauche et à droite). On obtient la fonction

$$y(x) = \frac{2\big(\sqrt{1+x^2}-1\big)}{x} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+1},$$

qui se prolonge par $y(0)=0$. Cette expression est C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x, vérifie $xy'(x)+y(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ (on peut vérifier par dérivation directe).

Il existe une unique solution C^1 sur $\mathbb{R}$: $\quad y(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ (avec $y(0)=0$).

Exercice 8

On cherche, pour chaque équation, la solution générale, puis la solution vérifiant $y(0)=y'(0)=0$.

1) $y''-3y'+2y=-x-1$.

Éq. homogène : $r^2-3r+2=0 \Rightarrow r=1,2$, donc $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Particulière $y_p = ax+b$: $y_p''-3y_p'+2y_p = (2a)x+(2b-3a) = -x-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{4}$. Ainsi

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$

Conditions initiales : $\begin{cases} y(0) = C_1+C_2-\frac{5}{4} = 0, \\ y'(0) = C_1+2C_2-\frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2=-\frac{3}{4},\ C_1=2.$

$$\boxed{y_1(x) = 2e^x - \frac{3}{4}\,e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}}.$$

2) $y''-2y'+5y = 3+\sin(2x)$.

Éq. homogène : $r^2-2r+5=0 \Rightarrow r=1\pm 2i$, $y_h = e^x\big(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\big)$.

Particulières :

$$y_{p,1} = c \Rightarrow 5c=3 \Rightarrow c=\tfrac{3}{5}, \qquad y_{p,2} = a\cos 2x + b\sin 2x.$$

En substituant, $(a-4b)\cos 2x + (4a+b)\sin 2x = \sin 2x \Rightarrow a=\frac{4}{17},\ b=\frac{1}{17}$. Donc

$$y(x) = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{3}{5} + \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

Conditions initiales : $\begin{cases} y(0) = C_1+\frac{3}{5}+\frac{4}{17} = 0, \\ y'(0) = C_1+2C_2+\frac{2}{17} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1=-\frac{71}{85},\ C_2=\frac{61}{170}.$

$$\boxed{y_2(x) = e^x\left(-\frac{71}{85}\cos 2x + \frac{61}{170}\sin 2x\right) + \frac{3}{5} + \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x}.$$

3) $y'' - 4y' + 4y = 3xe^{2x}$.

Éq. homogène : $(r-2)^2 = 0 \Rightarrow y_h = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$. Posons $y = e^{2x}z$. Alors $(D-2)^2 y = e^{2x}z'' = 3xe^{2x} \Rightarrow z'' = 3x$. On peut choisir $z_p = \frac{1}{2}x^3$, donc $y_p = \frac{1}{2}x^3 e^{2x}$.

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 e^{2x}.$$

CI : $y(0) = C_1 = 0$, $y'(0) = C_2 = 0$.

$$\boxed{y_3(x) = \frac{1}{2}\, x^3 e^{2x}}.$$

4) $y'' + y = \sin^3 x$.

On écrit $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. Éq. homogène : $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Particulière pour $\frac{3}{4}\sin x$ (résonance) : essayons $y_{p,1} = \alpha x \cos x$. Alors $y''_{p,1} + y_{p,1} = -2\alpha \sin x$, donc $-2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{8}$.

Particulière pour $-\frac{1}{4}\sin 3x$ (pas de résonance) : $y_{p,2} = A\cos 3x + B\sin 3x \Rightarrow y''_{p,2} + y_{p,2} = -8(A\cos 3x + B\sin 3x) = -\frac{1}{4}\sin 3x$. Donc $A = 0,\ B = \frac{1}{32}$.

Ainsi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{3}{8}\, x\cos x + \frac{1}{32}\sin 3x.$$

CI : $y(0) = C_1 = 0$, et $y'(0) = C_2 - \frac{3}{8} + \frac{3}{32} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{9}{32}$.

$$\boxed{y_4(x) = \frac{9}{32}\sin x - \frac{3}{8}\, x\cos x + \frac{1}{32}\sin 3x}.$$

Exercice 9

On cherche les solutions sur $]0, +\infty[$ (à cause de $\ln x$). Posons

$$x = e^t \quad (t = \ln x), \qquad Y(t) = y(e^t) = y(x).$$

Alors

$$y'(x) = \frac{1}{x}Y'(t), \qquad y''(x) = \frac{Y''(t) - Y'(t)}{x^2}.$$

L'équation

$$x^2 y'' - 2y = \frac{1}{x} + \ln x$$

devient, en remplaçant $x = e^t$ (donc $e^{-t} = 1/x$ et $t = \ln x$),

$$Y'' - Y' - 2Y = e^{-t} + t. \qquad (*)$$

Résolution de $(*)$**.** Homogène : $r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2, -1$,

$$Y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Particulières :

$$Y_{p,1} = c\, t\, e^{-t} \ \Rightarrow\ Y''_{p,1} - Y'_{p,1} - 2Y_{p,1} = -3c\, e^{-t} \ \Rightarrow\ c = -\tfrac{1}{3},$$

$$Y_{p,2} = at + b \ \Rightarrow\ Y''_{p,2} - Y'_{p,2} - 2Y_{p,2} = -2at - (a + 2b) = t \ \Rightarrow\ a = -\tfrac{1}{2},\ b = \tfrac{1}{4}.$$

Donc

$$Y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{3}\, t\, e^{-t} - \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{4}.$$

Retour à x**.** Comme $e^{2t} = x^2$, $e^{-t} = 1/x$ et $t = \ln x$, on obtient, pour $x > 0$,

$$\boxed{y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} - \frac{1}{3}\,\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2}\,\ln x + \frac{1}{4}}.$$

Exercice 10

On résout sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 1.$$

Changement de fonction : $z = x^2y$ (donc $y = \dfrac{z}{x^2}$). Alors

$$y' = \frac{z'}{x^2} - \frac{2z}{x^3}, \qquad y'' = \frac{z''}{x^2} - \frac{4z'}{x^3} + \frac{6z}{x^4}.$$

En remplaçant dans l'équation :

$$x^2\left(\frac{z''}{x^2} - \frac{4z'}{x^3} + \frac{6z}{x^4}\right) + 4x\left(\frac{z'}{x^2} - \frac{2z}{x^3}\right) + 2\frac{z}{x^2} = 1.$$

Les termes en z' et z se simplifient, il reste

$$\boxed{z'' = 1}.$$

On intègre :

$$z'(x) = x + C_1, \qquad z(x) = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

En revenant à $y = z/x^2$,

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} \qquad (x > 0).}$$

Exercice 11

On considère (E) : $(x-1)\,y'' - y' - x\,y = 0$.

1) Recherche d'une solution $f(x) = e^{ax}$. En substituant $y = e^{ax}$ dans (E) :

$$e^{ax}\big((x-1)a^2 - a - x\big) = 0 \iff \big(a^2-1\big)x - \big(a^2+a\big) = 0 \ \text{ (pour tout } x).$$

Il faut donc $a^2 - 1 = 0$ et $a^2 + a = 0$, d'où $a = -1$.

$$\boxed{f(x) = e^{-x} \text{ est une solution de } (E).}$$

2) Changement $y = f\,z = e^{-x}z$ **sur** $]1, +\infty[$. On a

$$y' = e^{-x}(z' - z), \qquad y'' = e^{-x}(z'' - 2z' + z).$$

En remplaçant dans (E) et en simplifiant par e^{-x} :

$$(x-1)(z'' - 2z' + z) - (z' - z) - xz = 0 \iff (x-1)z'' - (2x-1)z' = 0.$$

Posons $w = z'$. On résout l'équation linéaire du premier ordre

$$w' - \frac{2x-1}{x-1}w = 0$$

Puisque $\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$, alors

$$w = z' = C\,(x-1)e^{2x}.$$

Intégration :

$$z(x) = C\int (x-1)e^{2x}dx + C_2 = C\,\frac{e^{2x}}{2}\Big(x - \frac{3}{2}\Big) + C_2.$$

Finalement,

$$y(x) = e^{-x}z(x) = C\,e^{x}\Big(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\Big) + C_2e^{-x} = A\,e^{-x} + B\,e^{x}\Big(x - \frac{3}{2}\Big),$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Sur }]1, +\infty[\ : \ y(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{x}\Big(x - \frac{3}{2}\Big)}.$$

Exercice 12

1) Résolution de (E_1) : $\quad y'' - 4y = ax + b.$

Homogène : $r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2$, $\quad y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. *Particulière :* on cherche $y_p = \alpha x + \beta$. Alors $-4(\alpha x + \beta) = ax + b$, d'où $\alpha = -\frac{a}{4}$, $\beta = -\frac{b}{4}$.

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{a}{4}\,x - \frac{b}{4}}.$$

2) Résolution de (E_2) : $\quad y'' - 4y = a|x| + b.$

On résout sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, puis on recolle en imposant $y \in C^1(\mathbb{R})$.

Sur $[0, +\infty[$ $(|x| = x)$:

$$y_+(x) = A\,e^{2x} + B\,e^{-2x} - \frac{a}{4}\,x - \frac{b}{4}.$$

Sur $]-\infty, 0]$ $(|x| = -x)$:

$$y_-(x) = C\,e^{2x} + D\,e^{-2x} + \frac{a}{4}\,x - \frac{b}{4}.$$

La condition $y \in C^1(\mathbb{R})$ impose $y_-(0) = y_+(0)$ et $y'_-(0) = y'_+(0)$, soit

$$C + D = A + B, \qquad -C + D = -A + B + \frac{a}{4}.$$

En fonction de A, B :

$$\boxed{C = A - \frac{a}{8}, \qquad D = B + \frac{a}{8}.}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions C^2 sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} A\,e^{2x} + B\,e^{-2x} - \dfrac{a}{4}\,x - \dfrac{b}{4}, & x \geq 0, \\ \big(A - \dfrac{a}{8}\big)e^{2x} + \big(B + \dfrac{a}{8}\big)e^{-2x} + \dfrac{a}{4}\,x - \dfrac{b}{4}, & x \leq 0, \end{cases} \qquad A, B \in \mathbb{R}.}$$

(La continuité de y et y' en 0 assure que $y''(0)$ existe et satisfait $y''(0) = 4y(0) + b$.)